ATTRACTION-RÉPULSION

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 ATTRACTION-RÉPULSION

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

a) Montrer que la suite $(A_n + S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis qu'il en va de même de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + b_k)$ et on suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

a) Pourquoi est-il vrai que $|b_n| \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang N ?

b) Montrer par un argument de convexité que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$: $\ln(1+x) \geqslant 2x\ln 2$, puis que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: $\left|\ln(1+x)\right| \leqslant 2|x|\ln 2$.

On pose pour tout $n \geqslant N$: $L_n = \sum_{k=N}^{n} \left|\ln(1+b_k)\right|$.

c) Montrer que la suite $(L_n)_{n\geqslant N}$ converge, puis qu'il en va de même de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On se donne à présent un intervalle I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

— I est stable par f,
— f possède un point fixe ℓ,
— f est *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* I, autrement dit f est deux fois dérivable sur I et sa dérivée seconde est continue sur I,
— f'' est bornée sur I.

On se donne également une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3) On suppose dans cette question que ℓ est *répulsif*, i.e. que $\left|f'(\ell)\right| > 1$. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ pour lequel pour tout $x \in I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$: $\left|f'(x)\right| \geqslant 1$. Cette assertion découle trivialement de la définition de la continuité de f' en ℓ et vous la comprendrez aisément sur un dessin, mais nous n'avons pas encore défini proprement la notion de limite d'une fonction.

a) Montrer que f' est soit minorée par 1, soit majorée par -1 sur $I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$. Attention, ça n'a rien d'évident.

b) En déduire que pour tout $x \in I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$: $\left|f(x) - f(\ell)\right| \geqslant |x-\ell|$.

c) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, elle est en fait stationnaire, i.e. constante à partir d'un certain rang.

On suppose désormais que ℓ est *attractif*, i.e. que $\left|f'(\ell)\right| < 1$. Il existe alors deux réels $\alpha > 0$ et $\eta \in [0,1[$ pour lesquels pour tout $x \in I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$: $\left|f'(x)\right| < \eta$.

On fait en outre l'hypothèse que $\left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$ contient u_N pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$: $\left|f(x) - f(\ell)\right| \leqslant \eta|x-\ell|$.

b) En déduire que $I \cap \left]\ell-\alpha, \ell+\alpha\right[$ est stable par f.

c) Montrer l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $|u_n - \ell| \leqslant M\eta^n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

À l'issue de ces questions, vous en savez plus sur les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, mais faites quelques dessins pour être sûrs que vous avez bien compris les résultats qui précèdent. Dessinez à main levée un exemple de fonction f convenable possédant un point fixe attractif et un autre possédant un point fixe répulsif, puis représentez quelques termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un point de départ u_0 proche de ℓ. Convaincus ?

On s'intéresse à présent à la *vitesse de convergence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. On conserve les hypothèses précédentes, mais on suppose en outre que $f'(\ell)\neq 0$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

5) Montrer que pour tous $a,x\in I$: $\quad f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$

6) **a)** Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $K\geqslant 0$ pour lesquels pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-\ell=f'(\ell)(u_n-\ell)(1+\varepsilon_n) \qquad \text{et pour tout } n\geqslant N : \quad |\varepsilon_n|\leqslant K\eta^n.$$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n-\ell=(u_0-\ell)f'(\ell)^n\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1+\varepsilon_k).$

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_n-\ell}{f'(\ell)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2 Limite supérieure/inférieure d'une suite réelle bornée

Ce deuxième problème est facultatif.

1) Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, grâce à la propriété de la borne supérieure/inférieure :

$$\left(u^{\sup}\right)_n=\sup\left\{u_k \mid k\geqslant n\right\} \qquad \text{et} \qquad \left(u^{\inf}\right)_n=\inf\left\{u_k \mid k\geqslant n\right\}.$$

Montrer que les suites $u^{\sup}$ et $u^{\inf}$ sont monotones. On peut ainsi poser :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(u^{\sup}\right)_n \quad (\textit{limite supérieure de } u) \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(u^{\inf}\right)_n \quad (\textit{limite inférieure de } u).$$

À défaut de posséder une limite, toute suite réelle bornée possède une limite supérieure et une limite inférieure. Ces notions peuvent être étendues au cas des suites non bornées, voire des suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais nous ne quitterons pas quant à nous le terrain des suites bornées.

2) Calculer les limites supérieure et inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

a) $u_n=a \quad (a\in\mathbb{R}).\qquad u_n=(-1)^n.$ $\qquad$ **b)** $u_n=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} & \text{si } n\equiv 0\,[3]\\ \sin n & \text{si } n\equiv 1\,[3]\\ 2 & \text{si } n\equiv 2\,[3].\end{cases}$

3) Montrer que pour toute suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n\leqslant\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n.$

4) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées. Montrer que si $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n\leqslant\limsup_{n\to+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to+\infty} u_n\leqslant\liminf_{n\to+\infty} v_n.$$

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si ses limites supérieure et inférieure sont égales, et que dans ce cas : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n=\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n.$

6) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n.$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n.$

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que : $\quad \limsup\limits_{n\to+\infty} S_n\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

c) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$: $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} S_n\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\mathrm{e}^{-k}.$

d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

7) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

a) Montrer que pour toute fonction strictement croissante $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$:

$$\limsup_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}\leqslant\limsup_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}\geqslant\liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

b) Montrer que la limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quel théorème redémontre-t-on ainsi au passage ?

On peut montrer de même que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.