BIRAPPORTS ET THÉORÈME DES QUATRE CERCLES DE MIQUEL

Des points de $\mathbb{C}$ sont dits *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle. En outre, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, on appelle *birapport de a, b, c et d* le nombre complexe : $\big[a, b, c, d\big] = \dfrac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$.

On étudie dans ce problème une caractérisation de la cocyclicité par le birapport et une application au *théorème des quatre cercles de Miquel*.

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts. On suppose a, b et c alignés. Montrer l'équivalence suivante :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont alignés si et seulement si :} \qquad \big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}.$$

2) Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$. Vérifier que si : $ab' - ba' \neq 0$, le couple $\left(\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)$ est solution du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Ce résultat sera réétudié et amélioré plus tard dans l'année.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ trois points non alignés.

a) Écrire pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ la proposition « ω est équidistant de a, b et c » sous la forme d'un système linéaire de deux équations d'inconnues ω et $\overline{\omega}$.

b) En déduire que a, b et c sont cocycliques.

4) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que les points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont distincts.

a) Montrer l'égalité : $\mathrm{Im}\Big(\big[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\big]\Big) = \dfrac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}} \times \dfrac{|z|^2-1}{\big|z-e^{i\alpha}\big|^2}$.

b) En déduire que : $\big[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\big] \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $z \in \mathbb{U}$.

5) Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$: $\big[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu\big] = \big[a, b, c, d\big]$.

6) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts. On suppose a, b et c non alignés. Montrer, notamment grâce aux questions **3)** et **5)**, l'équivalence suivante :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont cocycliques si et seulement si :} \qquad \big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}.$$

À l'issue de ces questions, le théorème suivant est démontré :

Théorème (Caractérisation des cercles-droites par le birapport) Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont cocycliques ou alignés si et seulement si :} \qquad \big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}.$$

7) Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ huit points distincts. Simplifier courageusement le produit suivant :

$$\big[a, c, b, d\big] \times \big[c', a', d', b'\big] \times \big[a', b, a, b'\big] \times \big[b, c', c, b'\big] \times \big[c, d', c', d\big] \times \big[d', a, a', d\big].$$

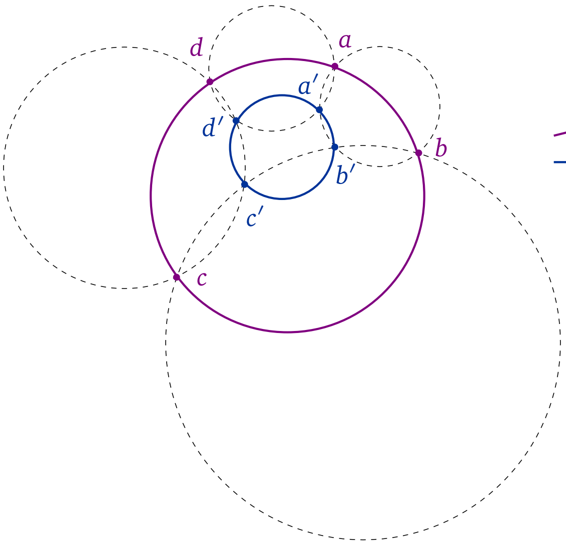
Le résultat est parfois appelé la *formule des six birapports*.

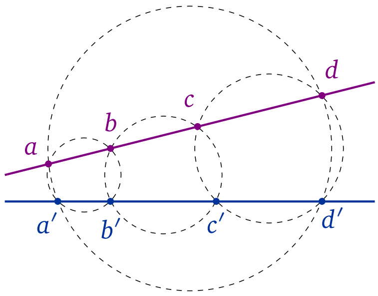
8) Démontrer enfin le *théorème des quatres cercles de Miquel* énoncé ci-dessous.

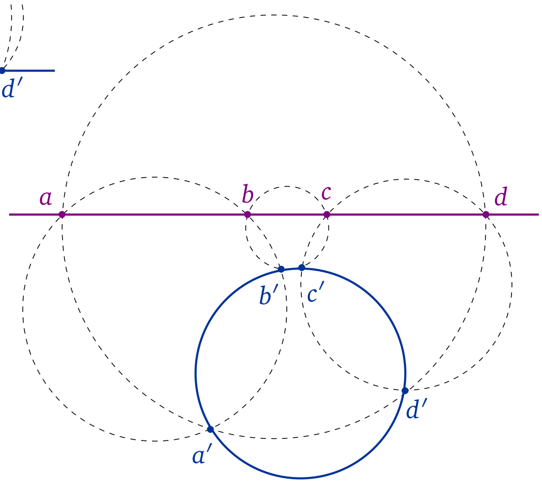
Théorème (Théorème des quatre cercles de Miquel) Soient $\mathscr{C}_{ab}$, $\mathscr{C}_{bc}$, $\mathscr{C}_{cd}$ et $\mathscr{C}_{da}$ quatre cercles. On suppose que $\mathscr{C}_{da}$ et $\mathscr{C}_{ab}$ se coupent en a et a', que $\mathscr{C}_{ab}$ et $\mathscr{C}_{bc}$ se coupent en b et b', que $\mathscr{C}_{bc}$ et $\mathscr{C}_{cd}$ se coupent en c et c' et que $\mathscr{C}_{cd}$ et $\mathscr{C}_{da}$ se coupent en d et d'. On suppose également enfin que les huit points $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont distincts.

Dans ces conditions, les points a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points a', b', c' et d' le sont.

Un drôle de théorème que ce théorème de Miquel ! De ce devoir se dégage au moins une idée importante — l'idée selon laquelle les droites et les cercles sont plus liés qu'il n'y paraît. On vous a appris à bien les distinguer, mais qu'est-ce qu'une droite au fond sinon un cercle... dont on a envoyé un point à l'infini ? Si si, c'est sérieux. De ce point de vue, un cercle et une droite relèvent du même concept — ce sont des *cercles-droites*. De même que $\mathbb{C}$ est plus parfait que $\mathbb{R}$ sur le terrain de la trigonométrie, certains théorèmes de géométrie plane méritent d'être énoncés dans un univers $\mathbb{C}$ auquel on a rajouté un point à l'infini. Les quatre cercles du théorème de Miquel peuvent en réalité être remplacés par des cercles-droites comme on le voit sur la dernière figure ci-dessous. Il faut pour le comprendre accepter de considérer que deux droites sécantes se coupent aussi à l'infini.







On illustre sur cette dernière figure le théorème de Miquel généralisé aux cercles-droites. Le point b est ici à l'infini, donc « absent », raison pour laquelle les cercles-droites $\mathscr{C}_{ab}$ et $\mathscr{C}_{bc}$ sont des droites.