Block-Thielmann et plus si affinités

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Le théorème de Block-Thielmann

On appelle *suite commutante* toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$: $\deg(P_n)=n$ et $P_m\circ P_n=P_n\circ P_m$. De telles suites existent-elles ? Qui sont-elles ?

On rappelle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un et un seul polynôme $T_n\in\mathbb{R}[X]$, appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev* et de degré n, pour lequel pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$. Par exemple : $T_0=1$, $T_1=X$, $T_2=2X^2-1\ldots$

1) Vérifier que les suites $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont commutantes.

2) Soit $p\in\mathbb{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des polynômes non constants $P\in\mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P\circ\left(X^2+p\right)=\left(X^2+p\right)\circ P$.

a) Montrer que tout élément de $\mathscr{C}$ est unitaire.

b) Soient $Q_1,Q_2\in\mathscr{C}$ de même degré. Montrer que $Q_1=Q_2$ en étudiant le polynôme $Q_1\circ\left(X^2+p\right)-Q_2\circ\left(X^2+p\right)$.

c) Montrer que si $\mathscr{C}$ contient un polynôme de degré 3, alors $p\in\left\{-2,0\right\}$.

d) Montrer que si $p=0$: $\mathscr{C}=\left\{X^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

3) Montrer que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ inversibles pour la composition sont exactement ceux dont le degré vaut 1. Que vaut l'inverse U^{-1} de U pour tout $U\in\mathbb{R}[X]$ de degré 1 ?

4) Montrer que pour toute suite commutante $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pour tout $U\in\mathbb{R}[X]$ de degré 1, la suite $\left(U\circ P_n\circ U^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également commutante.

5) a) Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $b,c\in\mathbb{R}$. Trouver un polynôme $U\in\mathbb{R}[X]$ de degré 1 pour lequel pour un certain $p\in\mathbb{R}$: $U\circ\left(aX^2+bX+c\right)\circ U^{-1}=X^2+p$.

b) Trouver un polynôme $U\in\mathbb{R}[X]$ de degré 1 pour lequel $U\circ\left(X^2-2\right)\circ U^{-1}=2X^2-1$.

6) Montrer que les suites commutantes sont exactement les suites $\left(U\circ X^n\circ U^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les suites $\left(U\circ T_n\circ U^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, U décrivant l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 (*théorème de Block-Thielmann*).

2 $\dfrac{\pi^2}{6}$ again

Ce deuxième exercice est facultatif. On y (re)démontre la fameuse égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1) On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction cotangente, puis tracer son graphe à partir de celui de la fonction tangente.

b) Exprimer $\operatorname{cotan}(\pi-x)$ en fonction de $\operatorname{cotan}x$ pour tout $x\in\mathscr{D}$.

c) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\operatorname{cotan}^2x\leqslant\dfrac{1}{x^2}\leqslant1+\operatorname{cotan}^2x$.

2) a) Déterminer pour tout $n\geqslant2$ la forme scindée du polynôme $(X+1)^n-(X-1)^n$ sur $\mathbb{C}$. On exprimera ses racines à l'aide de la fonction cotangente.

b) En déduire que pour tout $n\geqslant2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{3}$.

3) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, puis conclure.