Calcul intégral de début d'année

1 Une intégrale

On souhaite calculer l'intégrale : $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Dans les résultats intermédiaires qui suivent, il vous appartient bien sûr de compléter les bornes « … » des différentes intégrales évoquées.

1) Montrer en posant : $u = \frac{x}{2}$ que : $I = 2\int_{\dots}^{\dots} \frac{1+\tan^2 u}{\tan u} \times u\,\mathrm{d}u$.

2) Montrer, en posant : $t = \tan u$ et grâce à une intégration par parties, que : $I = \frac{\pi}{2}\ln 3 - 2\int_{\dots}^{\dots} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer pour tout $\alpha > 0$ l'intégrale : $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant : $x = \frac{1}{t}$. En déduire I.

2 Irrationalité de π et de la tangente aux valeurs rationnelles

On souhaite établir le résultat suivant.

Théorème π est irrationnel, de même que $\tan r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$.

Soit $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On suppose par l'absurde que $\tan r$ est rationnel, i.e. que : $\tan r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $x \longmapsto \frac{\left(2ax - bx^2\right)^n}{n!}$ et on pose : $I_n = \int_0^{2r} f_n(x)\,\sin x\,\mathrm{d}x$.

1) a) Que valent le minimum et le maximum de la fonction $x \longmapsto 2ax - bx^2$ entre 0 et $2r$?

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|I_n| \leqslant \left(\frac{a^2}{b}\right)^n \times \frac{2|r|}{n!}$.

On **admettra** que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette croissance comparée selon laquelle les suites géométriques sont négligeables devant la suite factorielle sera bientôt un résultat de cours. D'après **1)b)**, en particulier : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) a) Exprimer I_0 et I_1 en fonction de $\cos r$ et $\sin r$. En déduire que : $I_0 \neq 0$.

b) Que valent f_n et f_n' en 0 et $2r$? En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $I_n = -\int_0^{2r} f_n''(x)\,\sin x\,\mathrm{d}x$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+2}'' = 4a^2 f_n - (4n+6)b f_{n+1}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = (4n+6)bI_{n+1} - 4a^2 I_n$.

e) En déduire l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de deux entiers $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels : $I_n = \left(a_n \cos r + b_n \sin r\right) \times 2\sin r$.

f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{qI_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}$. On commencera par justifier la bonne définition de ce quotient.

3) Montrer que les résultats précédents contredisent la proposition : $I_0 \neq 0$.

À ce stade, la proposition suivante est donc démontrée : $\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$, $\tan r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4) Conclure en exploitant convenablement le réel $\frac{\pi}{4}$.