Calcul intégral de début d'année

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une suite d'intégrales

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1) a) Calculer a_1.

b) Calculer a_0 grâce au changement de variable : $x = \mathrm{sh}\, t$.

2) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sans en calculer les termes.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) On pose à présent pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Simplifier $a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)b_n$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+3)a_{n+2} \leqslant \sqrt{2}$.

d) Calculer enfin : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n$.

2 Irrationalité de l'exponentielle aux valeurs rationnelles

1) On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$: $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$: $I_{n+2}(x) = \dfrac{2}{(n+1)!x}\displaystyle\int_{-1}^1 t\left(1-t^2\right)^{n+1}\mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t$,

puis que : $I_{n+2}(x) = \dfrac{4}{x^2}\,I_n(x) - \dfrac{4n+6}{x^2}\,I_{n+1}(x)$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n à coefficients entiers pour laquelle : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad I_n(x) = \dfrac{P_n(x)\,\mathrm{e}^x - P_n(-x)\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{2n+1}}$.

2) Soit $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec $p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On veut prouver que le réel e^x est irrationnel. On raisonne pour cela par l'absurde en le supposant rationnel de la forme : $\mathrm{e}^x = \dfrac{a}{b}$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $abp^{2n+1}I_n(x)$ est un entier non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer, en encadrant $I_n(x)$, que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} abp^{2n+1}I_n(x) = 0$.

c) Conclure.

3) Que peut-on dire de $\ln x$ lorsque x est un rationnel strictement positif autre que 1 ?