Cauchy-Schwarz et le binôme négatif

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses alentours

On s'intéresse dans un premier temps à l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$: $\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$.

1) Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

b) On suppose à présent que l'un des réels $x_1, \ldots, x_n$ est non nul et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $S(t) = \sum_{k=0}^n (x_k t + y_k)^2$.
Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2 et calculer son discriminant, puis conclure.

On s'intéresse à présent à une sorte de renversement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$. On pose : $m = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{x_k}{y_k}$ et $M = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{x_k}{y_k}$.

a) Montrer que : $\sum_{k=1}^n x_k^2 + mM \sum_{k=1}^n y_k^2 \leqslant (m+M) \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

b) Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

c) En déduire que : $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

On souhaite pour finir établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité de Hardy) Pour tous $a_1, \ldots, a_n > 0$: $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \ldots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$.

3) a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\sum_{p=1}^k a_p \times \sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p} \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

b) En déduire l'inégalité : $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \ldots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$.

4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

b) En déduire que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$: $\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2p^2}$.

5) Conclure.

2 La formule du binôme négatif

On s'intéresse au résultat suivant.

Théorème (Formule du binôme négatif) Pour tous $x \in]-1,1[$ et $r \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

Soit $x \in]-1,1[$ fixé. On pose pour tous $r,n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle S_{r,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+r}{r} x^k$.

On ADMET que pour tout $r \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^r x^n = 0$.

1) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle S_{r-1,n} - (1-x)S_{r,n} = \binom{n+r}{r} x^{n+1}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r}\binom{n+r}{r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3) **a)** Montrer que la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite $(S_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à préciser.

c) Conclure.