Cayley-Hamilton et les traces nulles

On se donne une fois pour toutes $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note χ_A son polynôme caractéristique, défini pour tout $x \in \mathbb{C}$ par : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$. On rappelle que χ_A est un polynôme unitaire de degré n dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de A.

On rappelle que A est dite *nilpotente* si : $A^r = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$.

On se propose d'établir les deux résultats suivants.

Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_A annule A : $\chi_A(A) = 0$.

En particulier, toute matrice carrée de taille n possède un polynôme annulateur de degré exactement n.

✖ **Attention !** ✖ Il est tentant de remplacer x par A dans l'égalité : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$, cela semble donner tout de suite le théorème de Cayley-Hamilton... **MAIS EN FAIT NON, OH QUE NON !** — car x y désigne un scalaire et non une matrice.

Théorème (Caractérisation de la nilpotence par les traces) La matrice A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$.

1 Théorème de Cayley-Hamilton

1) Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton sur l'exemple de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Soient $M_0, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^n x^k M_k = 0$. Montrer que : $M_0 = \ldots = M_n = 0$.

Attention ! Les matrices $M_0, \ldots, M_n$ sont justement des matrices et non des scalaires !

On introduit à présent les coefficients de χ_A : $\chi_A(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^n p_k X^k$ et on pose pour tout $x \in \mathbb{C}$: $C(x) = {}^t\mathrm{com}(xI_n - A)$.

3) a) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $x \longmapsto c_{ij}(x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.

b) En déduire l'existence de matrices $C_0, \ldots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{C}$: $C(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k C_k$.

c) Montrer que : $p_0 I_n = -C_0 A$, $p_n I_n = C_{n-1}$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$: $p_k I_n = C_{k-1} - C_k A$.

d) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $C_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k-1} p_{i+k+1} A^i$.

e) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

2 Caractérisation de la nilpotence par les traces nulles

4) **a)** Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Que vaut la dérivée du produit $f_1 \dots f_n$?

b) Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction. On suppose que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, la fonction $x \longmapsto m_{ij}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_1, \dots, M_n$ les colonnes de M et $M_1', \dots, M_n'$ leurs dérivées composante par composante. On pose enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Delta(x) = \det\big(M(x)\big)$.

Montrer que Δ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Delta'(x) = \sum_{k=1}^{n} \det\big(\dots, M_{k-1}(x), M_k'(x), M_{k+1}(x), \dots\big)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\chi_A'(x) = \mathrm{tr}\big(C(x)\big)$.

d) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\mathrm{tr}(C_k) = (k+1)p_{k+1}$.

e) Montrer que : $p_{n-1} = -\mathrm{tr}(A)$.

5) On suppose dans cette question que : $\mathrm{tr}\big(A^k\big) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que : $\chi_A = X^n + p_0$.

b) En déduire que A est nilpotente.

6) On suppose dans cette question que A est nilpotente.

a) Montrer que 0 est la seule valeur propre de A.

b) En déduire χ_A, puis montrer que : $\mathrm{tr}(A) = 0$.

c) En déduire que : $\mathrm{tr}\big(A^k\big) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La question qui suit est une application de la caractérisation de la nilpotence par les traces.

7) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et $AB - BA$ commutent.

a) Montrer que pour toute matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute à A : $\mathrm{tr}\big((AB - BA)C\big) = 0$.

b) En déduire que $AB - BA$ est nilpotente.