CHEMINS DE DYCK ET THÉORIE DES ARBRES

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes. Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : parties **1** et **2**.

— Piste noire : parties **2** et **3**, sachant que la partie **3** est délicate et exotique.

1 MOTS TERNAIRES

La lettre n désigne un entier naturel non nul dans tout cet exercice. On appelle *mot ternaire de longueur* n tout mot de n lettres sur l'alphabet $\{0,1,2\}$. Combien existe-t-il de mots ternaires de longueur n :

1) en tout ?

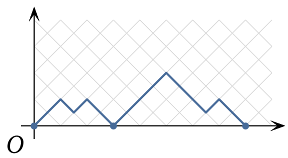
2) contenant exactement p symboles 0 avec $p \in [\![0,n]\!]$ fixé ?

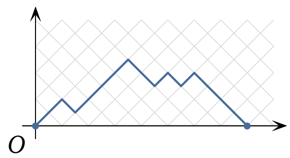
3) contenant au plus deux lettres de l'alphabet $\{0,1,2\}$?

4) dont les lettres sont rangées dans l'ordre croissant — par exemple 001111222 ?

2 CHEMINS DE DYCK

La chenille Becky se promène le long d'un grillage plan infini. Initialement positionnée en O, elle effectue $2n$ déplacements nord-est ($\nearrow$) ou sud-est ($\searrow$) en restant à tout instant au-dessus de l'axe des abscisses et en y terminant sa promenade.





De tels chemins sont appelés des *chemins de Dyck*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ ainsi définis — ce nombre est aussi appelé le $n^{\text{ème}}$ *nombre de Catalan*.

1) a) Calculer C_0, C_1 et C_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement C_n chemins de Dyck de longueur $2n+2$ qui ne touchent l'axe des abscisses qu'en leurs extrémités.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

2) On note à présent f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de coefficients associée : $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$: $\quad x f(x)^2 = f(x) - 1$.

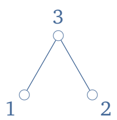
c) En déduire une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire finalement une expression explicite de C_n en fonction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

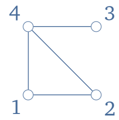
3 THÉORIE DES ARBRES ET FORMULE DE CAYLEY

Soit E un ensemble fini non vide fixé une fois pour toutes. On appelle *graphe sur* E toute partie Γ de l'ensemble $\mathscr{P}_2(E)$ des paires d'éléments de E. Les éléments de E sont appelés les *sommets* d'un tel graphe et les éléments de Γ ses *arêtes*. Une arête $\{x,y\}$ sera notée xy ou yx pour simplifier.

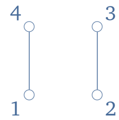
1) Combien existe-t-il de graphes sur E ?



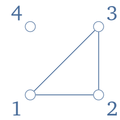
$\{13,23\}$
Graphe sur $[\![1,3]\!]$



$\{12,14,24,34\}$
Graphe sur $[\![1,4]\!]$



$\{14,23\}$
Graphe sur $[\![1,4]\!]$



$\{12,13,23\}$
Graphe sur $[\![1,4]\!]$

Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in E$, on appelle *chaîne de longueur p d'extrémités x et y* d'un graphe sur E tout ensemble d'arêtes de ce graphe de la forme $\{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{p-1}x_p\}$ avec $x_0, \ldots, x_p \in E$ et $x_0 = x$ et $x_p = y$, qu'on pourra noter $x_0x_1 \ldots x_p$ pour simplifier. Une telle chaîne est appelée un *cycle* si $x_0 = x_p$ et si aucune arête n'y est présente deux fois. Enfin, un graphe est dit *acyclique* s'il ne possède aucun cycle.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *graphe complet sur* $[\![1,n]\!]$ le graphe $K_n = \mathscr{P}_2\big([\![1,n]\!]\big)$.

a) Représenter K_1, K_2, K_3 et K_4.

b) Combien K_n contient-il de cycles de longueur 3 (resp. 4) pour tout $n \geqslant 3$ (resp. $n \geqslant 4$) ?

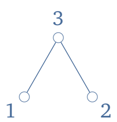
3) Soit Γ un graphe sur E. Pour tous $x, y \in E$, on dit que $x \sim_\Gamma y$ si $x = y$ ou si Γ contient une chaîne d'extrémités x et y.

a) Montrer que $\sim_\Gamma$ est une relation d'équivalence sur E.

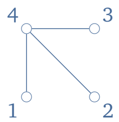
Les classes d'équivalence de $\sim_\Gamma$ sont appelées les *composantes connexes de* Γ. On dit que Γ est *connexe* s'il ne possède qu'une seule composante connexe. Par exemple, sur les figures précédentes, les deux premiers graphes sont connexes, mais pas les deux derniers.

b) Soit C une composante connexe de Γ. Montrer que $\Gamma \cap \mathscr{P}_2(C)$ est un graphe connexe sur C.

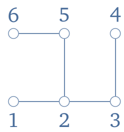
On appelle à présent *arbre sur E* tout graphe connexe acyclique sur E. Par exemple :



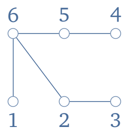
Arbre sur $[\![1,3]\!]$



Arbre sur $[\![1,4]\!]$

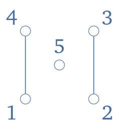


Arbre sur $[\![1,6]\!]$

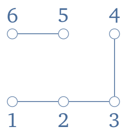


Arbre sur $[\![1,6]\!]$

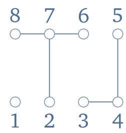
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle *k-forêt sur E* tout graphe acyclique sur E qui possède exactement k composantes connexes. D'après **3)b)**, ces composantes connexes définissent chacune un arbre. Par exemple :



3-forêt sur $[\![1,5]\!]$



2-forêt sur $[\![1,6]\!]$

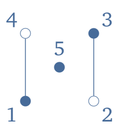


3-forêt sur $[\![1,8]\!]$

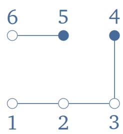
4) a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$, Γ une $(k+1)$-forêt sur E et e_1 et e_2 deux éléments de E pour lesquels $e_1 \not\sim_\Gamma e_2$. Montrer que le graphe $\Gamma \cup \{e_1e_2\}$ est une k-forêt sur E.

b) En déduire par récurrence sur $|E|$ que deux arbres sur E ont toujours le même nombre d'arêtes.

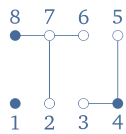
Enraciner une forêt, c'est choisir dans chacune de ses composantes connexes un élément qu'on appelle une *racine*. Sur les graphes ci-dessous, les racines sont représentées par des disques et les sommets non-racines par des cercles :



3-forêt enracinée sur $[\![1,5]\!]$



2-forêt enracinée sur $[\![1,6]\!]$



3-forêt enracinée sur $[\![1,8]\!]$

Dans tout ce qui suit : $n = |E| \geqslant 2$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des arbres sur E et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des k-forêts enracinées sur E, i.e. des couples (Γ, R) composés d'une k-forêt Γ et d'un ensemble R de k racines.

5) a) Soient $k \in [\![1,n-1]\!]$, $e \in E$, (Γ, R) une $(k+1)$-forêt enracinée sur E et $x \in R$ une racine pour laquelle $x \not\sim_\Gamma e$. Montrer que $\big(\Gamma \cup \{ex\}, R \setminus \{x\}\big)$ est une k-forêt enracinée de E dont x n'est pas racine.

b) En déduire par double comptage que pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$: $(n-k)\,|\mathscr{F}_k| = nk\,|\mathscr{F}_{k+1}|$.

6) Que vaut $|\mathscr{F}_n|$? Exprimer $|\mathscr{F}_1|$ en fonction de $|\mathscr{A}|$, puis en déduire la *formule de Cayley* : $|\mathscr{A}| = n^{n-2}$.