COMBIEN DE NOMBRES TRANSCENDANTS ?

1 UNE BIJECTION DE $\mathbb{N}^2$ SUR $\mathbb{N}$ ET SES ALENTOURS

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Ce résultat justifie la bonne définition de l'application $(m,n) \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$ de $\mathbb{N}^2$ DANS $\mathbb{N}$. On se propose de montrer que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

2) Proposer une illustration graphique de la bijectivité de f.

3) **a)** Exprimer $f(m,n+1)$ en fonction de $f(m+1,n)$, puis $f(n+1,0)$ en fonction de $f(0,n)$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire que f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

4) **a)** Montrer que pour tous $m,m',n,n' \in \mathbb{N}$: $\quad m'+n' \geqslant m+n+1 \quad \Longrightarrow \quad f(m',n') > f(m,n)$.
b) En déduire que f est injective sur $\mathbb{N}^2$.

5) **a)** Proposer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ — ou de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$, au choix.
b) Soient A,B,A',B' des ensembles, φ une bijection de A sur A' et ψ une bijection de B sur B'. Montrer que l'application $(x,y) \longmapsto \big(\varphi(x),\psi(y)\big)$ est une bijection de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
c) Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{Z}^p$ est équipotent à $\mathbb{N}$, i.e. qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}^p$ — ou de $\mathbb{Z}^p$ sur $\mathbb{N}$, au choix.

2 RUDIMENTS DE DÉNOMBRABILITÉ

On commence par une définition.

Définition (Ensemble dénombrable/au plus dénombrable/indénombrable) Soit E un ensemble.

- On dit que E est *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, i.e. s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
- On dit que E est *au plus dénombrable* s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.
- On dit que E est *indénombrable* s'il n'est pas au plus dénombrable.

Nous avons vu par exemple en cours que $\mathbb{R}$ est indénombrable. On peut montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable — mais comme aucune définition propre des ensembles finis n'a été donnée jusqu'ici, cette remarque n'est qu'une simple intuition.

On se donne à présent un ensemble au plus dénombrable I et une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles au plus dénombrables. Par hypothèse, il existe donc une injection ρ de I dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $i \in I$, une injection φ_i de A_i dans $\mathbb{N}$. Posant : $\quad U = \bigcup_{i\in I} A_i$, on souhaite montrer que l'ensemble U est lui aussi au plus dénombrable.
Comme ρ est bijective de I sur son image $\rho(I)$, on peut réécrire U en : $\quad U = \bigcup_{j\in\rho(I)} A_{\rho^{-1}(j)} \quad$ grâce au changement d'indice : $j = \rho(i)$. Dans cette nouvelle écriture, l'ensemble d'indices $\rho(I)$ est une partie de $\mathbb{N}$ alors que I ne l'est pas forcément au départ. Quitte à remplacer la première écriture de U par la seconde, on peut ainsi supposer sans perte de généralité que I est une partie de $\mathbb{N}$. On peut bien sûr aussi supposer A_i non vide pour tout $i \in I$.

6) On pose pour tout $x \in U$: $\quad m_x = \min\left\{i \in I / \quad x \in A_i\right\} \quad$ et $\quad \theta(x) = \big(m_x, \varphi_{m_x}(x)\big)$.
a) Justifier la bonne définition de m_x pour tout $x \in U$.
b) Montrer que θ est injective.
c) En déduire que U est au plus dénombrable.

3 Combien de nombres transcendants ?

Là aussi, on commence par une définition.

Définition (Nombre algébrique, nombre transcendant) Un réel est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et *transcendant* sinon.

7) **a)** Montrer que tout rationnel est algébrique.

b) Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont algébriques.

Il semble ainsi facile de construire des nombres algébriques. Qu'en est-il des nombres transcendants ? Il est toujours difficile de montrer qu'un nombre donné est transcendant. On peut montrer que e et π sont transcendants, mais ce n'est pas une partie de plaisir. Le *théorème de Gelfond-Schneider*, encore plus difficile et démontré en 1934, énonce que pour tout nombre algébrique α distinct de 0 et 1 et pour tout nombre algébrique irrationnel β, α^β est transcendant. Ainsi, par exemple, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est transcendant. Ces remarques donnent à penser que les nombres transcendants sont rares. On va pourtant démontrer le contraire !

On note :

— pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d et à coefficients entiers,

— $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers,

— pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{Rac}(P)$ l'ensemble des racines réelles de P — on **ADMET** que si P est non nul, $\mathrm{Rac}(P)$ est un ensemble fini, donc au plus dénombrable,

— $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

8) Montrer dans cet ordre que les ensembles $\mathscr{E}_d$, d décrivant $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}[X]$, puis $\mathbb{A}$ sont au plus dénombrables.

9) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ des nombres transcendants est indénombrable.

À l'issue de ce devoir, il existe une injection de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{N}$. Or l'application $n \longmapsto n$ est de son côté une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{A}$ car : $\mathbb{N} \subset \mathbb{A}$. Il découle ainsi du *théorème de Cantor-Bernstein* évoqué en cours que les ensembles $\mathbb{N}$ est $\mathbb{A}$ sont équipotents, i.e. que $\mathbb{A}$ est dénombrable. Conclusion : il y a infiniment plus de nombres transcendants que de nombres algébriques — et pourtant on n'en a pas exhibé un seul !