Construire l'exponentielle

Objectif de ce devoir : construire l'exponentielle réelle à partir de rien. Mission périlleuse s'il en est car **AUCUNE** utilisation des fonctions exponentielle et logarithme n'est donc permise ! En passant, si jamais l'un ou l'une d'entre vous me raconte dans une copie que $1^{+\infty} = 1$, je lui coupe la tête.

On pose pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad e_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

L'ensemble des réels x pour lesquels la suite $\big(e_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente **DE LIMITE NON NULLE** est noté E et on pose pour tout $x \in E$: $\quad e(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e_n(x)$.

1) a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $\quad \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^k \geqslant 1 - \dfrac{k}{n+1}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\quad \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^k}\dbinom{n+1}{k}$.

c) En déduire la monotonie de la suite $\big(e_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour tout $x \geqslant 0$.

2) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\quad \dbinom{n}{k} \leqslant n^k$.

b) En déduire que pour tous $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad e_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

c) Montrer que E contient l'intervalle $[0, 1[$. Que vaut $e(0)$?

3) a) Montrer que pour tous $x \in \,]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \big|e_n(x) - 1\big| \leqslant \dfrac{|x|}{1-|x|}$.

b) En déduire que pour toute suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\alpha_n)^n = 1$.

4) a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n(x)\, e_n(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que E est *stable par passage à l'opposé* : $\quad \forall x \in E, \quad -x \in E$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e_n(x)\, e_n(y)}{e_n(x+y)} = 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, puis que E est *stable par addition* : $\quad \forall x, y \in E, \quad x+y \in E$.

c) Montrer que $E = \mathbb{R}$ et que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad e(x+y) = e(x)\, e(y)$.

5) a) Montrer que pour tous $x \in \,]-1, 1[$ non nul et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \left|\dfrac{e_n(x) - 1}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{|x|}{1-|x|}$.

b) En déduire que e est dérivable en 0 et que $e'(0) = 1$.

c) Montrer enfin que e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $e' = e$.