CONSTRUIRE L'EXPONENTIELLE

Nous allons dans ce devoir construire l'exponentielle réelle à partir de rien. Mission périlleuse s'il en est car bien sûr, quand on construit l'exponentielle « à partir de rien », on s'interdit toute utilisation quelle qu'elle soit des fonctions exponentielle et logarithme. Si je vois une fois quelque part l'exponentielle ou le logarithme dans vos œuvres, votre mission est un échec.

Si d'autre part je rencontre dans vos copies le principe : $1^{+\infty} = 1$, principe dont ce devoir montre justement qu'il est **FAUX**, je vous coupe la tête.

D'un point de vue technique, ce devoir a principalement pour but de vous faire manipuler des inégalités.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathfrak{e}_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. L'ensemble des réels x pour lesquels la suite $\big(\mathfrak{e}_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente **DE LIMITE NON NULLE** est noté E, et pour tout $x \in E$, on pose : $\mathfrak{e}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathfrak{e}_n(x)$. Vous allez montrer au gré des questions qui suivent que : $E = \mathbb{R}$ et que la fonction $\mathfrak{e} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi construite n'est rien d'autre que notre bonne vieille exponentielle réelle.

1) a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^k \geqslant 1 - \dfrac{k}{n+1}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^k}\dbinom{n+1}{k}$.

c) Montrer enfin que la suite $\big(\mathfrak{e}_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $x \geqslant 0$.

2) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\dbinom{n}{k} \leqslant n^k$.

b) En déduire que pour tous $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathfrak{e}_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

c) Montrer enfin que E contient l'intervalle $[0, 1[$. Que vaut $\mathfrak{e}(0)$?

3) a) En raffinant la technique de la question **2)b)**, montrer que pour tous $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\big|\mathfrak{e}_n(x) - 1\big| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}.$$

b) En déduire que pour toute suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \alpha_n)^n = 1$.

4) On exploite dans cette question le résultat de la question **3)**.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathfrak{e}_n(x)\,\mathfrak{e}_n(-x) = 1$.

b) En déduire que pour tout $x \in E$: $-x \in E$.

c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathfrak{e}_n(x)\,\mathfrak{e}_n(y)}{\mathfrak{e}_n(x+y)} = 1$.

d) En déduire que pour tout $x, y \in E$: $x + y \in E$.

e) Montrer enfin que : $E = \mathbb{R}$ et que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\mathfrak{e}(x+y) = \mathfrak{e}(x)\,\mathfrak{e}(y)$.

5) a) Montrer que pour tous $x \in]-1, 1[$ non nul et $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\mathfrak{e}_n(x) - 1}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{|x|}{1-|x|}$.

b) En déduire que $\mathfrak{e}$ est dérivable en 0 et que : $\mathfrak{e}'(0) = 1$.

c) Montrer enfin, en revenant à la définition du nombre dérivé en un point, que $\mathfrak{e}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$.