CONSTRUIRE LE LOGARITHME

Il s'agit dans ce devoir de construire la fonction logarithme à partir de « rien », c'est-à-dire en ne supposant connues que les propriétés des réels et la théorie des limites de suites. Il est bien sûr rigoureusement interdit d'utiliser la fonction logarithme dans les questions qui suivent !

1 CONSTRUCTION SUR $\mathbb{N}^*$

Pour tous $p, n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\ell_n(p) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$ — avec la convention usuelle, pour $p = 1$, qu'une somme vide est nulle.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Étudier la monotonie de la suite $\big(\ell_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que la suite $\big(\ell_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Sa limite est notée $\ell(p)$. Que vaut $\ell(1)$?

2) En calculant $\ell_n(pq) - \ell_n(p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$: $\ell(pq) = \ell(p) + \ell(q)$.

3) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{p}{p+q} \leqslant \ell(p+q) - \ell(q) \leqslant \dfrac{p}{q}$.

4) Montrer que la fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

2 CONSTRUCTION SUR $\mathbb{Q}_+^*$

Pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$ donné sous la forme : $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\ell(r) = \ell(p) - \ell(q)$.

5) Cette définition soulève a priori DEUX difficultés logiques sérieuses, lesquelles ? Lever ces difficultés.

6) Montrer que pour tous $r, s \in \mathbb{Q}_+^*$: $\ell(rs) = \ell(r) + \ell(s)$ et $\dfrac{r}{1+r} \leqslant \ell(1+r) \leqslant r$.

7) Montrer que la fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{Q}_+^*$.

8) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$: $\ell(x) = \sup\Big\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ et } r \leqslant x\Big\}$.

3 CONSTRUCTION SUR $\mathbb{R}_+^*$

Plus généralement, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\mathscr{L}(x) = \Big\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ et } r \leqslant x\Big\}$.

9) Montrer que l'ensemble $\mathscr{L}(x)$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, notée $\ell(x)$.

10) Montrer que la fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra commencer par montrer qu'elle y est croissante.

11) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut se donner une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}_+^*$ croissante et convergente de limite x.

a) Montrer que la suite $\big(\ell(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite λ inférieure ou égale à $\ell(x)$.

b) On suppose par l'absurde que : $\lambda \neq \ell(x)$. En observant que λ ne majore pas $\mathscr{L}(x)$, montrer que : $x \in \mathbb{Q}_+^*$, puis dénicher une contradiction.

12) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$ et $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ell(1+x) \leqslant x$.

13) **a)** Montrer que la fonction ℓ est dérivable en 1.

b) En déduire que la fonction ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.