Crochets de Lie

Dans ce problème, la lettre E désigne une fois pour toutes un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle n. Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *crochet de Lie de u et v* l'endomorphisme : $\big[u, v\big] = uv - vu$ de E, dans lequel on rappelle que le produit désigne une composition. On s'intéresse dans ce problème au lien que $\big[u, v\big]$ peut entretenir avec les endomorphismes u et v dont il est issu.

1) Un résultat de stabilité : Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si f et g commutent, Ker g et Im g sont stables par f.

2) Noyaux itérés et décomposition de Fitting : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Étudier la monotonie de la suite $\left(\mathrm{Ker}\, f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que l'ensemble $\left\{k \in [\![1, n]\!] / \quad \mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}\right\}$ possède un plus petit élément p, appelé l'*indice de f*.

c) Montrer que pour tout $k \geqslant p$: $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^p$.

d) En déduire que : $E = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$ (*décomposition de Fitting de E par rapport à f*).

e) Montrer que $f|_{\mathrm{Ker}\, f^p}$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{Ker}\, f^p$ et que $f|_{\mathrm{Im}\, f^p}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, f^p$.

f) Montrer que si f est nilpotent, i.e. si : $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, alors : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3) Encore des noyaux : Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer, en exploitant astucieusement le théorème du rang, que : $\dim \mathrm{Ker}\,(gf) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$.

b) En déduire que si : $f^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors : $\dim \mathrm{Ker}\, f > 1$.

4) Un résultat de nilpotence : Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\big[u, v\big] = u$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\big[u^k, v\big] = ku^k$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que u **N'est PAS** nilpotent.

b) Montrer par récurrence que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^r\right)$ est libre pour tout $r \in \mathbb{N}$.

c) Conclure.

5) Étude de certains couples d'endomorphismes :

a) On note u l'endomorphisme $P \longmapsto P'$ et v l'endomorphisme $P \longmapsto XP'$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Vérifier que : $\big[u, v\big] = u$ et $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.

À présent, soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\big[u, v\big] = u$ et $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.

b) Montrer l'existence d'un vecteur $a \in E$, fixé désormais, pour lequel la famille $\left(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.

On pose pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $e_k = u^k(a)$ et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$. On note en outre $\widetilde{u}$ l'unique endomorphisme de E défini pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ par : $\widetilde{u}(e_k) = -ke_k$.

c) Montrer que : $\big[u, \widetilde{u}\big] = u$, puis que u et $v - \widetilde{u}$ commutent.

On note à présent $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ les coordonnées du vecteur $v(a) - \widetilde{u}(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.

d) Montrer l'égalité : $v = \widetilde{u} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$.

e) Déterminer l'ensemble des endomorphismes w de E pour lesquels : $\big[u, w\big] = u$.

6) Une généralisation : Cette question plus subtile est facultative. On y généralise le résultat de la question **4)**.

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\big[u, [u, v]\big] = 0_{\mathscr{L}(E)}$, i.e. que $\big[u, v\big]$ et u commutent.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\big[u^k, v\big] = ku^{k-1}\big[u, v\big]$.

On note à présent p l'indice de $\big[u, v\big]$ et on pose : $F = \mathrm{Im}\, \big[u, v\big]^p$.

b) Que peut-on dire de $\big[u, v\big]|_F$?

On pose enfin : $\mathscr{F} = \left\{P \in \mathbb{K}[X] / \quad \forall x \in F, \quad P(u)(x) = 0_E\right\}$.

c) Montrer que pour tous $P \in \mathscr{F}$, l'application $\big[u, v\big]^p \big[P(u), v\big]$ est nulle sur F.

d) En déduire que $\mathscr{F}$ est stable par dérivation, i.e. que pour tout $P \in \mathscr{F}$: $P' \in \mathscr{F}$.

e) En déduire que $\big[u, v\big]$ est nilpotent.