DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY ET INVERSIBILITÉ

Le symbole « 0 » a plusieurs significations dans ce devoir et l'on y fera bien attention. Il désigne parfois le **NOMBRE** 0, parfois la **COLONNE** $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ de taille n, et parfois la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition (Matrice symétrique (définie) positive) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- On dit que M est *positive* si pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$: ${}^t XMX \geqslant 0$.
- On dit que M est *définie positive* si pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$ **NON NULLE** : ${}^t XMX > 0$. Cela revient à dire que pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$: ${}^t XMX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si : $X = 0$.

1) **a)** Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $m_{ii} > 0$.

b) À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice diagonale est-elle symétrique définie positive ?

c) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t AA$ est symétrique positive, et qu'elle est même symétrique définie positive si A est inversible.

d) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t PMP$ est symétrique définie positive.

2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

a) Déterminer, en exploitant les opérations élémentaires, une matrice triangulaire supérieure P à coefficients diagonaux tous égaux à 1 pour laquelle les premières ligne et colonne de ${}^t PMP$ sont nulles hors coefficient diagonal.

b) Montrer que pour une certaine matrice triangulaire supérieure Q à coefficients diagonaux tous égaux à 1, la matrice ${}^t QMQ$ est diagonale à coefficients strictement positifs.

c) En déduire qu'on peut écrire : $M = {}^t TT$ pour une certaine matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs.

3) On note à présent M la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer explicitement une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs pour laquelle : $M = {}^t TT$. Cette égalité montre, d'après **1)c)**, que M est définie positive.

4) Soient $T_1, T_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On suppose que : ${}^t T_1 T_1 = {}^t T_2 T_2$ et on pose : $T = T_1 T_2^{-1}$.

a) Montrer que T est triangulaire supérieure.

b) Montrer que : $T_1 = T_2$.

À l'issue des questions **3)** et **4)**, on a prouvé le théorème suivant.

Théorème (Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Il existe une et une seule matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs pour laquelle : $M = {}^t TT$. Cette décomposition de M est appelée sa *décomposition de Cholesky*.

5) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible.

Anecdotique au premier abord, le concept de *noyau* introduit ci-dessous sera bientôt l'un des concepts majeurs de l'*algèbre linéaire* — ce vaste pan des mathématiques auquel le deuxième semestre sera grandement consacré.

Définition (Noyau d'une matrice carrée) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *noyau de* M et on note $\operatorname{Ker} M$ l'ensemble $\left\{X \in \mathbb{R}^n / \quad MX = 0\right\}$ des solutions du système linéaire homogène : $\quad MX = 0 \quad$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$.

6) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: $\quad \operatorname{Ker} A = \left\{0\right\}$.

On rappelle que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\quad \operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B) \quad$ et $\quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

7) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\quad \operatorname{Ker} A = \left\{0\right\}$.

a) Montrer que la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est inversible.

b) Montrer que : $\quad \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}MM\right) = 0 \quad$ où : $\quad M = I_n - A\left({}^{\mathrm{t}}AA\right)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A$.

c) En déduire que : $\quad M = 0, \quad$ puis que A est inversible.

À l'issue des questions **6)** et **7)**, une caractérisation de l'inversibilité vient d'être prouvée. Ce résultat important fera bientôt partie des meubles — mais patience !

Théorème (Caractérisation de l'inversibilité par le noyau)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si : $\quad \operatorname{Ker} A = \left\{0\right\}$.

Nous avons déjà vu qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si le système linéaire : $\quad AX = Y \quad$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ possède une et une seule solution pour tout second membre $Y \in \mathbb{R}^n$. La caractérisation qui précède montre qu'il n'est en fait pas nécessaire de résoudre ce système **POUR TOUT SECOND MEMBRE**. La matrice A est inversible si le système **HOMOGÈNE** qui lui est associé n'a pas d'autre solution que la solution évidente 0.

8) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si : $\quad AB = I_n, \quad$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

b) En déduire que si le produit AB est inversible, les matrices A et B le sont aussi.

Pour apprécier la saveur du résultat de la question **8)a)**, il ne faut pas oublier la définition de l'inversibilité. En principe, il faut connaître les deux égalités : $\quad AB = I_n \quad$ **ET** $\quad BA = I_n \quad$ pour savoir que A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Le résultat de la question **8)b)** est quant à lui la réciproque d'un théorème de cours selon lequel tout produit de matrices inversibles est une matrice inversible.