Des déterminants un peu limites

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes. Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste verte : question **0)a)** et partie **1**.

— Piste bleue : question **0)** et partie **1** et **2**.

— Piste noire : tout le devoir.

0) Pour toute suite $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *converge vers A* si $\lim\limits_{t\to+\infty} a_{tij}=a_{ij}$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

a) Soient $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. On suppose que $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers A et $(B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vers B. Montrer que les suites $(\lambda A_t+\mu B_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(A_tB_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $\big(\det(A_t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites respectives.

b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_A\left(\dfrac{1}{t}\right)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{N}^*$ assez grand, puis que A est la limite d'une suite de matrices inversibles.

1 Intersections toutes de même cardinal

Soient $r\in\mathbb{N}^*$ et $A_1,\ldots,A_n$ des parties distinctes de $[\![1,N]\!]$. On suppose que $\left|A_i\cap A_j\right|=r$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ distincts. Qu'impose cette hypothèse aux entiers n et N ? C'est à cette question qu'on souhaite répondre.

On note pour cela M la matrice de taille $N\times n$ définie par $m_{ij}=\mathbb{1}_{A_j}(i)$ pour tous $i\in[\![1,N]\!]$ et $j\in[\![1,n]\!]$

1) Montrer que r ne peut être égal qu'à l'un des cardinaux $|A_1|,\ldots,|A_n|$ au plus.

2) Déterminer une expression explicite simple, coefficient par coefficient, de la matrice $M^\top M$.

3) Soient $a,b,c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$. On note P le polynôme $(c_1-X)\ldots(c_n-X)$ et on pose pour tout $x\in\mathbb{C}$:

$$D(x)=\begin{vmatrix} x+c_1 & x+b & \cdots & x+b \\ x+a & x+c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+b \\ x+a & \cdots & x+a & x+c_n \end{vmatrix}.$$

a) Montrer que la fonction D est affine, puis en déduire une expression explicite de $D(0)$ en fonction de a, b et P dans le cas où $a\neq b$.

b) En déduire que si $a=b$, alors $D(0)=P(a)-P'(a)a$.

4) **a)** Montrer que $\det\big(M^\top M\big)>0$.

b) Comparer $\mathrm{rg}(AB)$ et $\mathrm{rg}(B)$ pour tous $A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$. En déduire une inégalité liant n et N.

2 Intersection des noyaux, somme des images

1) Soient $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent. On veut montrer que : $\begin{vmatrix} A & C \\ B & D\end{vmatrix}=\det(AD-BC)\quad\bigstar$.

a) Montrer $\bigstar$ sous l'hypothèse que A est inversible.

b) En déduire $\bigstar$ dans le cas général.

La relation $\bigstar$ n'est pas vraie en général si A et B ne commutent pas, mais la recherche d'un contre-exemple n'est pas demandée.

On se donne à présent deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

2) Montrer que : $\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = n - \dim\big(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B\big).$

3) On suppose que $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$. Justifier l'existence de deux matrices $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \mathbb{C}^n$.

4) On suppose que $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \mathbb{C}^n$. Justifier l'existence de deux matrices $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles $AD - BC = I_n$. En déduire que $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$.

En résumé, sous l'hypothèse que A et B commutent : $\boxed{\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\} \iff \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \mathbb{C}^n.}$

3 Développement limité du déterminant

Cet exercice est beaucoup plus subtil que les précédents. On y manipule des matrices à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles complexes. Ce corps contient $\mathbb{C}$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_n\big(\mathbb{C}(X)\big)$.

On ADMET que la théorie du déterminant développée en cours sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ reste valable sans modification aucune sur $\mathcal{M}\big(\mathbb{C}(X)\big)$. Le résultat de la question **0)b)** ne peut en revanche pas être utilisé dans ce cadre. La convergence usuelle des suites complexes nous a facilement fourni une notion de convergence pour les suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais nous ne savons pas faire converger les suites de fractions rationnelles, donc encore moins les suites de matrices de $\mathcal{M}_n\big(\mathbb{C}(X)\big)$! D'où les subtilités de la question **3)** ci-dessous.

1) Montrer que $\det(A + XB) \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) a) Montrer que le coefficient de degré 1 de $\det(I_n + XM)$ est $\operatorname{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) En déduire, sous l'hypothèse que A est inversible, que le coefficient de degré 1 de $\det(A + XB)$ est $\operatorname{tr}\big(\operatorname{com}(A)^\top B\big)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3) Pour toute suite $(P_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que $(P_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *converge vers* P si $\lim\limits_{t\to+\infty} a_{tk} = a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, où $(a_{tk})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est la famille des coefficients de P_t et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ celle de P.

a) Soient $(P_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(Q_t)_{t\in\mathbb{N}}$ deux suites de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ pour lesquelles $P_tQ_t \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, ainsi que $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On suppose que $(P_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers P et $(Q_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vers Q. Montrer que les suites $(\lambda P_t + \mu Q_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(P_tQ_t)_{t\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites respectives.

b) Soient $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers A et $(B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vers B. Montrer que les suites $\big(\det(A_t + XB_t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ et $\big(\operatorname{com}(A_t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites respectives.

4) a) Montrer que le coefficient de degré 1 de $\det(A + XB)$ est $\operatorname{tr}\big(\operatorname{com}(A)^\top B\big)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) En déduire un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \det(A + xB)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.