Des motifs qu'on répète

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une équation fonctionnelle

1) Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \geqslant 0$: $f(2x) = 2f(x)$.

2) On note à présent $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \geqslant 0$: $f(2x) = 2f(x)$. On résout donc ici la même équation fonctionnelle qu'en **1)**, mais avec seulement une hypothèse de continuité.

On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des fonctions $g \in \mathscr{C}\big([1,2[, \mathbb{R}\big)$ pour lesquelles : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 2g(1)$.

Pour toute fonction $g \in \mathscr{G}$, on note $\widehat{g}$ la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\widehat{g}(0) = 0$ et pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \big[2^n, 2^{n+1}\big[$: $\widehat{g}(x) = 2^n g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

a) Représenter à main levée un exemple un peu quelconque d'élément g de $\mathscr{G}$, puis représenter la fonction $\widehat{g}$ associée.

b) Soit $g \in \mathscr{G}$. Montrer que g est bornée sur $[1,2[$, puis que pour tout $x \geqslant 0$: $\big|\widehat{g}(x)\big| \leqslant \|g\|_{\infty,[1,2[}\, x$. En déduire que $\widehat{g}$ est continue en 0.

c) Montrer que pour tout $g \in \mathscr{G}$, $\widehat{g}$ est continue en 2^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

d) Achever de montrer que pour tout $g \in \mathscr{G}$: $\widehat{g} \in \mathscr{F}$.

e) Montrer que l'application $g \longmapsto \widehat{g}$ est une bijection de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{F}$ et expliciter sa réciproque.

2 À propos des périodes d'une fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

— Pour tout $T \in \mathbb{R}$, on dit que f est *T-périodique* ou que T est une *période de f* si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x+T) = f(x)$. Attention, avec cette définition, une période peut-être négative et toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est 0-périodique.

— L'ensemble des périodes de f est noté $\mathrm{Per}(f)$. Si $\mathrm{Per}(f) \cap \mathbb{R}_+^*$ possède un plus petit élément T, on dit que T est la *plus petite période de f*.

On dit que f est *périodique* si elle possède une période non nulle, i.e. si : $\mathrm{Per}(f) \neq \{0\}$.

On note alors :

— $\mathscr{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $T \in \mathbb{R}$,

— $\mathscr{C}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $T \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mathscr{C}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ N'EST PAS un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ possède une plus petite période et la déterminer.

3) a) Montrer que $\mathrm{Per}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{1}_G$ la *fonction indicatrice de G dans $\mathbb{R}$* définie par : $\mathbb{1}_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } x \in G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{Per}(\mathbb{1}_G)$.

On ADMET momentanément le théorème clasique suivant.

> **Théorème (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)** Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit *monogène*, i.e. de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\text{Per}(f)$ est soit monogène, soit égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

b) En déduire que toute fonction continue périodique non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possède une plus petite période.

5) Soient T_1 et T_2 deux réels strictement positifs pour lesquels : $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.

b) Soient $f_1 \in \mathscr{C}_{T_1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f_2 \in \mathscr{C}_{T_2}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose f_1+f_2 périodique et on note T l'une de ses périodes strictement positives.

i) Montrer que la fonction $x \longmapsto f_1(x+T) - f_1(x)$ est à la fois T_1-périodique et T_2-périodique.

ii) En déduire que l'une au moins des fonctions f_1 et f_2 est constante.

6) Cette question finale est facultative. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On suppose : $G \neq \{0\} = 0\mathbb{Z}$.

a) Justifier l'existence du réel : $\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.

b) On suppose : $\alpha = 0$. Montrer que l'intervalle $]x, y[$ contient un élément de G pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $x < y$. En d'autres termes, G est dense dans $\mathbb{R}$.

c) On suppose : $\alpha > 0$.

i) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $\alpha \in G$.

ii) En déduire que : $G = \alpha\mathbb{Z}$.