DEUX APPLICATIONS DE L'INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

On étudie dans ce problème la célèbre *inégalité de Cauchy-Schwarz* et deux de ses innombrables conséquences.

1 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

On établit dans un premier temps l'inégalité suivante de deux façons différentes.

> **Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$: $$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

1) Première preuve : Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où : $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

b) On suppose à présent que l'un des réels $x_1, \ldots, x_n$ est non nul et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $S(t) = \sum_{k=1}^n (x_k t + y_k)^2$.
Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2 positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, puis conclure.
Où l'hypothèse de non-nullité de l'un des réels $x_1, \ldots, x_n$ a-t-elle servi ?

2) Deuxième preuve : Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. On pose : $X = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ et $Y = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$. Simplifier les sommes $\sum_{k=1}^n \big(Yx_k - Xy_k\big)^2$ et $\sum_{k=1}^n \big(Yx_k + Xy_k\big)^2$, puis conclure.

2 SOMME PARALLÈLE ET INÉGALITÉ DE MILNE

Pour tous $a, b > 0$, on appelle *somme parallèle de a et b* et on note $a \| b$ le réel : $a\|b = \dfrac{ab}{a+b}$.

3) Vérifier que pour tous $a, b, c > 0$: $a\|b = b\|a$ (*commutativité*) et $\big(a\|b\big)\big\|c = a\big\|\big(b\|c\big)$ (*associativité*).

L'associativité du symbole $\|$ autorise l'addition parallèle de plus de deux réels strictement positifs — $a\|b\|c$ par exemple — sans qu'on ait à préciser l'ordre des parenthésages.

On s'intéresse à présent à l'inégalité suivante, que l'on démontrera de deux façons différentes.

> **Théorème (Inégalité de Milne)** Pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$: $$\sum_{k=1}^n \big(a_k\|b_k\big) \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k \,\middle\|\, \sum_{k=1}^n b_k\right).$$

4) Première preuve : Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$. On pose : $A = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B = \sum_{k=1}^n b_k$.

a) Montrer que : $A^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \dfrac{a_k^2}{a_k + b_k}\right)(A+B)$.

b) Montrer l'inégalité de Milne en remarquant que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\dfrac{a_k b_k}{a_k + b_k} = a_k - \dfrac{a_k^2}{a_k + b_k}$.

5) Deuxième preuve :

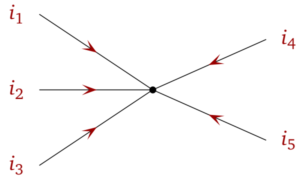
a) Que vaut le minimum de la fonction $x \longmapsto ax^2 + b(1-x)^2$ sur $\mathbb{R}$ pour tous $a, b > 0$?

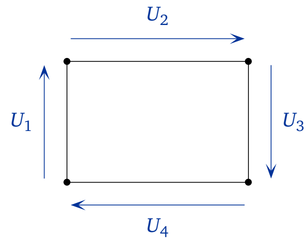
b) En déduire que pour tous $a, a', b, b' > 0$: $\big(a\|b\big) + \big(a'\|b'\big) \leqslant (a+a')\big\|(b+b')$.

c) En déduire, par récurrence, l'inégalité de Milne.

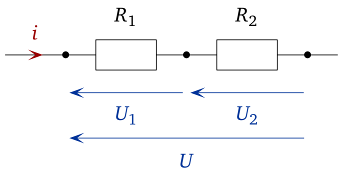
En électrocinétique, la tension U, l'intensité i et la résistance R sont liées par la fameuse *loi d'Ohm* : $U = Ri$. Les *lois de Kirchhoff* complètent cette relation. La première, dite *loi des nœuds*, énonce qu'en un nœud, la somme des intensités entrantes est nulle. La deuxième, dite *loi des mailles*, énonce que dans une maille, la somme de toutes les tensions orientées dans le même sens est nulle.

Loi des nœuds : $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0.$

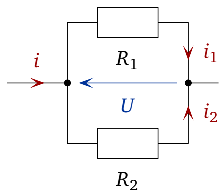




Loi des mailles : $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0.$

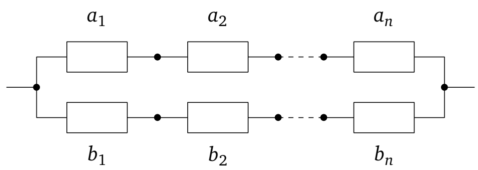


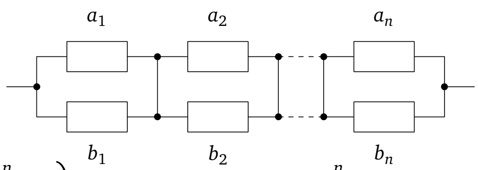
Il découle de ces lois que des résistances *en série* dans un circuit s'additionnent. Sur la figure ci-contre, en effet : $U = U_1 + U_2$ d'après la loi des mailles, donc : $U = (R_1 + R_2)\, i$ d'après la loi d'Ohm. La branche considérée porte ainsi une résistance totale de valeur $R_1 + R_2$.



Le calcul est un peu plus compliqué pour des résistances *en parallèle*. Sur la figure ci-contre : $i = i_1 + i_2$ d'après la loi des nœuds, donc : $i = \dfrac{U}{R_1} + \dfrac{U}{R_2}$ d'après la loi d'Ohm, donc : $U = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\, i = \big(R_1 \| R_2\big)\, i$. La branche considérée porte ainsi une résistance totale de valeur $R_1 \| R_2$. On comprend mieux ainsi pourquoi l'opération $\|$ est appelée *addition parallèle*.

On s'intéresse pour finir aux deux circuits représentés ci-dessous, qui ne diffèrent que par quelques fils transversaux ajoutés à droite.





La résistance totale équivalente du circuit de gauche vaut $\left(\sum_{k=1}^n a_k \Big\| \sum_{k=1}^n b_k\right)$, et à droite, elle vaut $\sum_{k=1}^n \big(a_k \| b_k\big)$. L'inégalité de Milne signifie donc que la résistance équivalente du circuit de gauche est toujours plus grande que celle du circuit de droite, autrement dit que le circuit de gauche dissipe plus de chaleur que celui de droite.

3 Inégalité discrète de Grüss

6) Soient $m, M \in \mathbb{R}$ avec : $m \leqslant M$ et $x_1, \ldots, x_n \in [m, M]$.

a) Montrer que : $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 = n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2.$

b) En déduire l'égalité : $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 + n \sum_{k=1}^n (M - x_k)(x_k - m) = (nM - s)(s - nm)$ où : $s = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k.$

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 \leqslant \dfrac{n^2(M-m)^2}{2}.$

On souhaite pour finir établir l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité discrète de Grüss) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. On note $a_{\max}$ (resp. $a_{\min}$) la plus grande (resp. petite) valeur des réels $a_1, \ldots, a_n$. On définit de manière analogue les réels $b_{\min}$ et $b_{\max}$. Alors :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k\right) \right| \leqslant \frac{1}{4} \big(a_{\max} - a_{\min}\big)\big(b_{\max} - b_{\min}\big).$$

7) a) Montrer que : $n \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$

b) En déduire l'inégalité : $\left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k\right) \right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i - a_j)^2} \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (b_i - b_j)^2}.$

c) Conclure.