Deux formules d'Euler

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie **1**.

— Piste rouge : tout le devoir, mais une question de la partie **2** requiert un certain théorème du chapitre « Dérivabilité ».

On doit au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) les deux identités suivantes, qui sont le but de ce devoir :

Théorème Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$ et $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

Au cas où vous ne le sauriez pas, la fonction *cotangente*, notée cotan, est par définition la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

0) Sur quel domaine les fonctions cotan et $\frac{1}{\tan}$ coïncident-elles ?

1 Développement en série de la fonction cotangente

1) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$ et $\sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\,\varphi(x)$.

b) Simplifier $\sigma_n\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\,\sigma_{2n}(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$: $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\,f(x)$.

a) Pourquoi f possède-t-elle un maximum m ? Montrer que $m = f(0)$.

b) En déduire que f est constante.

3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé.

a) Vérifier que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\sigma_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - k^2}$.

b) Montrer que la suite $\big(\sigma_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone à partir d'un certain rang.

c) Montrer que pour tout k assez grand : $0 \leqslant \frac{1}{k^2 - x^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Quels k peut-on choisir si $x \in]-1,1[$?

d) En déduire que la suite $\big(\sigma_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera $\sigma(x)$ sa limite.

e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\sigma\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\,\sigma(x)$, puis par une technique analogue que σ est 1-périodique.

4) **a)** Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$ pour lesquels $p \geqslant n$: $\big|\sigma_p(x) - \sigma_n(x)\big| \leqslant \frac{2|x|}{n}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$: $\big|\sigma(x) - \sigma_n(x)\big| \leqslant \frac{2|x|}{n}$. En déduire $\lim_{x \to 0} \left(\sigma(x) - \frac{1}{x}\right)$.

c) Soit $a \in]0,1[$ fixé. Montrer que σ est continue en a en revenant à la définition de la limite. On commencera par observer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$: $\big|\sigma(x) - \sigma(a)\big| \leqslant \big|\sigma(x) - \sigma_n(x)\big| + \big|\sigma_n(x) - \sigma_n(a)\big| + \big|\sigma(a) - \sigma_n(a)\big|$.

d) En déduire que σ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

5) **a)** Simplifier $\int_0^x t \sin t \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que : $\big|x \cos x - \sin x\big| \leqslant \frac{|x|^3}{3}$. En déduire $\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right)$.

b) En déduire que $\varphi - \sigma$ est prolongeable par continuité en 0.

c) Montrer finalement que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \sigma(x)$. Le premier résultat de ce devoir est démontré.

2 Développement eulérien du sinus

6) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$: $\quad \Delta_n(x) = \ln \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

a) Montrer que Δ_n est prolongeable par continuité en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et préciser la valeur de $\Delta_n(0)$ retenue.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$: $\quad \left|\Delta_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{n}$.

c) En déduire que la suite $\big(\Delta_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 pour tout $x \in [0,1[$, puis que : $\quad \sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

7) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad \Pi_n(x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

a) Exprimer $\Pi_n(x+1)$ en fonction de $\Pi_n(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n > x$.

b) En déduire que la suite $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sin(\pi x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

3 Valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs

Attention ! Les calculs qui suivent manquent de rigueur en l'état, mais on peut tous les justifier proprement avec un peu plus de connaissances.

Il y a au moins une collection de sommes infinies que nous savons bien calculer, ce sont les sommes géométriques. En l'occurrence, pour tout $t \in]-1,1[$: $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \dfrac{t}{1-t}$. $\quad$ Posons par ailleurs $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ pour tout $\alpha > 1$. La fonction ζ est une fonction usuelle parmi les plus fascinantes des mathématiques, très liée aux nombres premiers en dépit des apparences.

Notons finalement θ la fonction $x \longmapsto \pi x \operatorname{cotan}(\pi x) - 1$. D'après le résultat de la partie **1**, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\theta(x) = \pi x \operatorname{cotan}(\pi x) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2-k^2} = -2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\dfrac{x}{k}\right)^2}{1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^2} = -2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{2n} \underset{\text{Whaou !}}{=} -2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{2n} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(2n)\,x^{2n}.$$

Il n'est par ailleurs pas difficile de tirer de la relation $\operatorname{cotan}' = -1 - \operatorname{cotan}^2$ que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\theta(x)\big) = -\pi^2x^2 - \theta(x)^2 \qquad \bigstar.$$

Or : $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\theta(x)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(2n)\,x^{2n+1}\right) \underset{\text{Whaou !}}{=} -2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(2n)\times(2n+1)\,x^{2n}$ $\quad$ et :

$$\begin{aligned}\theta(x)^2 &= 4\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\zeta(2i)\,x^{2i}\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\zeta(2j)\,x^{2j}\right) \underset{\text{Whaou !}}{=} 4\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*}\zeta(2i)\,\zeta(2j)\,x^{2(i+j)} \underset{\text{Whaou !}}{=} 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^*\\ i+j=n}}\zeta(2i)\,\zeta(2j)\right)x^{2n}\\ &= 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\,\zeta(2n-2k)\right)x^{2n},\end{aligned}$$

donc pour tout $x \in]0,\pi[$, d'après $\bigstar$: $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2(2n+1)\,\zeta(2n)\,x^{2n} = \pi^2x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(4\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\,\zeta(2n-2k)\right)x^{2n}$. $\quad$ Des deux côtés de l'égalité, ce sont deux expressions « polynomiales infinies » qu'on a écrites, et il se trouve que les coefficients d'une telle expression sont uniques. Il en découle par identification que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ pour $n=1$, et que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\zeta(2n) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\,\zeta(2n-2k).$$

Cette relation de récurrence permet de calculer $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$... de proche en proche. Par exemple, après calcul :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \qquad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}\ldots$$

On peut aussi tirer de la relation de récurrence — et c'est clair sur les premières valeurs de ζ — que $\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ est rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On ignore au contraire à peu près tout des réels $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$... Le mathématicien français Roger Apéry a montré en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel, deux ou trois résultats intéressants ont été obtenus depuis, mais le sujet est loin d'être épuisé et les recherches se poursuivent.