Deux problèmes d'arithmétique

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Le produit de 5 entiers consécutifs n'est jamais un carré

1) Déterminer tous les couples $(a,b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ pour lesquels $a^2 - b^2 \in [\![1,4]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$: $\quad n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = k^2$. Objectif : dénicher une contradiction.

2) a) Que peuvent valoir les diviseurs premiers de $(n+i) \wedge (n+j)$ pour tous $i,j \in [\![0,4]\!]$ pour lesquels $i<j$?

b) En déduire que pour tout $i \in [\![0,4]\!]$: $\quad n+i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} m_i^2 \quad$ pour certains $\alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}$ et $m_i \in \mathbb{N}$.

3) On suppose que $n+i$ est divisible par 6 pour un certain $i \in [\![1,3]\!]$. Montrer que $n+i-1$ et $n+i+1$ sont des carrés parfaits, puis conclure.

4) On suppose qu'aucun des entiers n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ et $n+4$ n'est divisible par 6. Adapter les idées de la question **3)** et conclure.

5) On suppose dans cette question que n est divisible par 6.

a) Montrer que $n+2$ et $n+4$ sont chacun soit un carré, soit le double d'un carré. Et $n+1$?

b) Conclure.

6) Quel(s) cas reste-t-il à traiter ? Conclure sans rentrer dans tous les détails.

2 À propos des entiers naturels n qui divisent 2^n+1

On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{E} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \quad n \text{ divise } 2^n+1 \right\}$, dont on va démontrer quelques propriétés. Les diviseurs et multiples manipulés dans ce problème sont tous positifs.

1) Montrer que tout élément de $\mathscr{E}$ est impair.

2) Soit $n \in \mathscr{E} \setminus \{1\}$. On note p le plus petit diviseur premier de n.

a) En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que $2^{(2n)\wedge(p-1)} \equiv 1\ [p]$.

b) En déduire que $p=3$.

3) Montrer que 2^n+1 divise $2^{(2m+1)n}+1$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}$, puis simplifier $\dfrac{2^{(2m+1)n}+1}{2^n+1}$ modulo d pour tout diviseur positif de 2^n+1.

4) En déduire que 3^k appartient à $\mathscr{E}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par passage au PPCM, i.e. que $m \vee n \in \mathscr{E}$ pour tous $m,n \in \mathscr{E}$.

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathscr{E}$ et tout diviseur d de n, le produit dn appartient à $\mathscr{E}$.

b) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit, i.e. que $mn \in \mathscr{E}$ pour tous $m,n \in \mathscr{E}$.

7) Déterminer sous Python — je veux le code ! — la liste des éléments de $\mathscr{E}$ inférieurs ou égaux à 1000.

La fin du problème est facultative.

8) Montrer que pour tout $n \in \mathscr{E}$, tout multiple de n qui possède les mêmes diviseurs premiers que n appartient à $\mathscr{E}$.

9) Soit $n \in \mathscr{E}$. On pose $\mathscr{A} = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \quad 2^k \equiv 1\ [n]\right\}$.

a) Montrer que $\mathscr{A}$ possède un plus petit élément a et que celui-ci est strictement inférieur à n si $n > 1$.

b) Montrer que $\mathscr{A} = a\mathbb{N}^*$, puis que a divise $2n$.

On note à présent q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par a.

c) Montrer que a divise $2r$, puis que $a = 2r$.

d) En déduire que $\dfrac{a}{2}$ appartient à $\mathscr{E}$.

e) Montrer que si $\dfrac{a}{2} = 1$, alors $n \in \left\{1, 3\right\}$, puis que si $\dfrac{a}{2} = 3$, alors $n = 9$.

10) Déduire du résultat de la question **9)** que tout élément de $\mathscr{E} \setminus \left\{1, 3\right\}$ est divisible par 9.