Développement asymptotique d'une suite récurrente

On ADMET momentanément le résultat suivant, démontré dans la partie **2**.

> **Théorème (Sommation d'équivalents)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives équivalentes.
> On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad$ et $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
> De deux choses l'une :
> — soit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes,
> — soit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes de limite $+\infty$ et : $\quad A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

Deux remarques :

— On peut bien sûr remplacer l'hypothèse « strictement positives » par l'hypothèse plus faible « strictement positives à partir d'un certain rang ».

— Dans le cas où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite NON NULLE ℓ, i.e. dans le cas où : $\quad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell, \quad$ le théorème énonce que : $\quad A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell n. \quad$ C'est tout simplement le théorème de Césaro !

1) **a)** Retrouver un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$ en étudiant $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

b) Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{\pi}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Développement asymptotique d'une suite récurrente

On note f la fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{\tan x}$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\quad \tan x > x$.

b) En déduire que l'intervalle $]0,1]$ est stable par f.

On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

4) Calculer un développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.

5) **a)** Déterminer un réel ω pour lequel la suite $\left(u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel NON NUL ℓ.

b) En déduire que : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$.

6) **a)** Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{2n}}\left(1 - \frac{17\ln n}{40n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$.

2 Preuve du théorème de sommation des équivalents

7) **a)** Avec les notations et les hypothèses du théorème, montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit convergente, soit divergente de limite $+\infty$.

b) On suppose $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente de limite $+\infty$. Montrer qu'alors : $\quad A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

c) On suppose $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également. Ces deux suites ont-elles la même limite ?