# DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les trois exercices suivants sont indépendants.

## 1 ROUTINE

**1)** Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{2\cos x - 1}$.

**2)** Étudier localement la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{\ln \operatorname{ch} x}$ au voisinage de $+\infty$ — existence d'une asymptote et position par rapport à celle-ci.

**3)** Montrer que : $\displaystyle x^x - (\sin x)^{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}\ln x$.

## 2 UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ COMPLEXE

On note $f$ la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(1+x)$ sur $\mathbb{R}$.

**1)** Déterminer un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\displaystyle f'(x) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+a}\right)$.

**2)** En déduire un développement limité de $f'$ à tout ordre au voisinage de 0. Pas de panique, cela ne change rien que $a$ soit un nombre complexe !

**3)** En déduire un développement limité explicite à tout ordre de $f$ au voisinage de 0.

**4)** Vérifier que les coefficients trouvés en **3)** sont tous des inverses d'entiers à partir de l'ordre 1.

## 3 LE LEMME DE HADAMARD

Ce dernier exercice est facultatif.

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle : $f(0) = 0$. On pose : $g(0) = f'(0)$ et pour tout $x \in ]0,1]$ : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. La fonction $g$ est clairement de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0,1]$, mais on va montrer mieux.

**Théorème (Lemme de Hadamard)** La fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ tout entier.

**1)** Pourquoi $f$ possède-t-elle un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 ?

On note $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ les coefficients de ce développement limité : $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i + \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big)$ avec en fait : $a_0 = 0$.

**2)** Montrer grâce à la formule de Leibniz que : $\displaystyle g^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{x^{p+1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x)$ pour tous $p \in [\![0,n]\!]$ et $x \in ]0,1]$.

**3)** Montrer que pour tous $p \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,p]\!]$ : $\displaystyle x^k f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} k! \sum_{i=k}^{p+1} \binom{i}{k} a_i x^i + \mathrm{o}\big(x^{p+1}\big)$.

**4)** En déduire que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$ : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x) = p!\, a_{p+1}$, puis conclure.