Développements limités

1 Une limite

Étudier la limite : $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{x^x - (\sin x)^x}$.

2 Étude locale d'une fonction

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln(x+1)}\sqrt{x^2+1}$ sur $]-1,+\infty[$.

1) Étudier la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

2) **a)** Montrer que pour certains réels a et b à préciser : $\displaystyle f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{a}{h} + \frac{b}{\ln h} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln h}\right)$.

b) En déduire que f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative au voisinage de $+\infty$ de son graphe par rapport à cette asymptote.

3 Une suite récurrente linéaire d'ordre 4

On explique dans cet exercice comment on peut déterminer grâce aux développements limités une expression explicite de suite récurrente linéaire d'ordre quelconque.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par : $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 16$, $u_3 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+4} = 9u_{n+2} - 4u_{n+1} - 12u_n.$$

1) Soit f une fonction possédant un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(12x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 1\right) f(x) \underset{x\to 0}{=} 16x^2 - 2x^3 + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

2) **a)** Factoriser le polynôme $X^4 - 9X^2 + 4X + 12$. En déduire la forme scindée du polynôme $12X^4 + 4X^3 - 9X^2 + 1$.

b) Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{16X^2 - 2X^3}{12X^4 + 4X^3 - 9X^2 + 1}$.

3) **a)** Pourquoi la fonction $x \longmapsto \dfrac{16x^2 - 2x^3}{12x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 1}$ possède-t-elle un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 ?

b) Calculer un développement limité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ à tout ordre au voisinage de 0.

c) Déduire du résultat de la question **2)c)** une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.