Développements limités

Les quatre exercices de ce devoir sont indépendants.

1 Un équivalent

Déterminer un équivalent simple de : $\displaystyle\binom{n}{4}\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Un prolongement par continuité

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On note f la fonction $x\longmapsto\dfrac{\ln(1+ax)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}+\dfrac{b}{x}$ définie au voisinage de 0.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

2) On suppose que f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur : $f(0)=0$. Montrer qu'alors f est dérivable en 0 et préciser une équation de sa tangente en 0.

3 Développements limités de la fonction Arcsin^2

On note f la fonction $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

1) Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire simple du premier ordre.

2) **a)** Pourquoi f possède-t-elle un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 ?

On note alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite réelle pour laquelle pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle f(x)\underset{x\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\mathrm{o}\big(x^n\big)$.

b) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}\,a_n$.

c) En déduire une expression explicite de a_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Calculer enfin un développement limité à tout ordre de la fonction $x\longmapsto\mathrm{Arcsin}^2x$ au voisinage de 0.

4 Une sombre histoire d'exponentielle et de nombres premiers

Ce dernier exercice est facultatif. Pour tous $n,r\in\mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle S_{n,r}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^r$.
On note f_n la fonction $x\longmapsto(\mathrm{e}^x-1)^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$ un développement limité de $f_n(x)$ à l'ordre $n+1$ lorsque x tend vers 0.

2) En déduire une expression simple de $S_{n,r}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,n+1]\!]$.

3) Soit $p\in\mathbb{P}$ fixé.

a) Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k-1}\binom{p-1}{k}\big(k^{p-1}-1\big)$.

b) En déduire le *théorème de Wilson* : $(p-1)!\equiv-1\ [p]$.