Développements limités

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une limite

Étudier la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

2 Étude locale d'une fonction

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}\sqrt{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1) Étudier la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

2) Montrer que f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative au voisinage de $+\infty$ de son graphe par rapport à cette asymptote.

3 Un problème de dénombrement

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de solutions de l'équation : $2a+3b=n$ d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On cherche une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm 1\right\}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} u_k x^k + o\left(x^n\right)$.

2) a) Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\left(1-X^2\right)\left(1-X^3\right)}$.

b) Simplifier : $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{x-j}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) a) Conformément au programme de MPSI, nous avons développé en cours une théorie des développements limités de fonctions **réelles**, mais nous aurions pu travailler avec des fonctions **complexes**. Calculer pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ un développement limité à tout ordre de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$ au voisinage de 0.

b) Calculer un développement limité à tout ordre de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ au voisinage de 0.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha n + \beta + \gamma(-1)^n + \delta \sin\dfrac{2(n+1)\pi}{3}$ pour certains réels α, β, γ et δ indépendants de n à préciser.

b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.