Développements limités

Les trois exercices de ce devoir sont indépendantes. Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste verte : exercices **1** et **2**.

— Piste bleue : tout le devoir.

1 Étude locale d'une fonction

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

2) Montrer que f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative au voisinage de $+\infty$ de son graphe par rapport à cette asymptote.

2 Une équation différentielle

On s'intéresse à l'équation différentielle ★ : $\quad x\left(x^2+1\right)y'(x) = y(x) + x^2\sqrt{x^2+1} \quad$ d'inconnue y dérivable.

1) Résoudre ★ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

2) En déduire les solutions d'★ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Attention, ce n'est pas trivial ! Toute solution d'★ sur $\mathbb{R}$ en est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, mais avec des « constantes de primitivation » a priori différentes. Procéder par analyse-synthèse et étudier soigneusement la dérivabilité en 0 à gauche et à droite.

3) Montrer que l'équation ★ possède une et une seule solution y sur $\mathbb{R}$ tout entier pour laquelle $y^{(5)}(0) = 1$.

3 Un problème de dénombrement

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ pour lesquels $2a+3b=n$.

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm 1\right\}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(x) \underset{x \to 0}{=} u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

2) **a)** Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\left(1-X^2\right)\left(1-X^3\right)}$.

b) Simplifier $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{j}}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) **a)** Nous avons développé en cours une théorie des développements limités pour les fonctions réelles, mais nous aurions pu le faire avec des fonctions complexes.

Calculer pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ un développement limité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$ à tout ordre au voisinage de 0.

b) Calculer un développement limité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ à tout ordre au voisinage de 0.

4) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \alpha n + \beta + (-1)^n\gamma + \delta \sin\dfrac{2(n+1)\pi}{3} \quad$ pour certains réels α, β, γ et δ indépendants de n à préciser.

b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5) **(Bonus)** Retrouver l'équivalent de la question **4)b)** par un raisonnement combinatoire plus ou moins direct.