DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL DE MATRICES NILPOTENTES

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ pour lequel : $A^r = 0$.
On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème (Théorème de Gerstenhaber-Serežkin) Soit $\mathscr{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composé seulement de matrices nilpotentes. Alors : $\dim \mathscr{N} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1 PRÉLIMINAIRES SUR LES MATRICES TRIANGULAIRES

On note :
- $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous nuls,
- $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Calculer la dimension de $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$.

2) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $V_k = \left\{X \in \mathbb{R}^n / \quad \forall i \in [\![k+1,n]\!], \quad x_i = 0\right\}$ — en particulier : $V_n = \mathbb{R}^n$.
Soit $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$.
  a) Montrer que tous $k \in [\![1,n]\!]$ et $X \in V_k$: $AX \in V_{k-1}$.
  b) En déduire que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$: $A^n X = 0$.
  c) En déduire l'égalité : $A^n = 0$.

Avez-vous compris l'intérêt des questions **1)** et **2)** ?

3) Montrer que les matrices de $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont les seules matrices nilpotentes de $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$.

4) Montrer que $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 QUELQUES RÉSULTATS SUR LES MATRICES NILPOTENTES

5) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
  a) Justifier l'existence d'un vecteur $X_1 \in \mathbb{R}^n$ non nul pour lequel : $AX_1 = 0$.
  On complète alors la famille libre (X_1) en une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on note P la matrice de cette base $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  b) Montrer que la première colonne de la matrice $P^{-1}AP$ est nulle.
  On peut ainsi noter A' la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour laquelle : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, dans laquelle le symbole « × » désigne des coefficients quelconques non précisés.
  c) Montrer que A' est nilpotente et que : $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$.

6) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
  a) Montrer l'égalité : $\mathrm{tr}(A) = 0$.
  b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$.

7) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les matrices A, B et $A+B$ sont nilpotentes. Montrer l'égalité : $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

3 Une preuve du théorème de Gerstenhaber-Serežkin

Soit $\mathscr{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composé seulement de matrices nilpotentes.

Grâce à la question **4)**, on peut noter p la projection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$. On note en outre τ l'endomorphisme $M \longmapsto {}^tM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

8) **a)** Montrer l'égalité : $\dim \mathscr{N} = \dim\big(\mathscr{N} \cap \mathscr{U}_n(\mathbb{R})\big) + \dim p(\mathscr{N})$.

b) En déduire l'égalité : $\dim \mathscr{N} = \dim \tau\big(\mathscr{N} \cap \mathscr{U}_n(\mathbb{R})\big) + \dim p(\mathscr{N})$.

9) Montrer que $\tau\big(\mathscr{N} \cap \mathscr{U}_n(\mathbb{R})\big)$ et $p(\mathscr{N})$ sont inclus dans $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$.

10) Soit $A \in \tau\big(\mathscr{N} \cap \mathscr{U}_n(\mathbb{R})\big) \cap p(\mathscr{N})$. On peut se donner une matrice $N \in \mathscr{N}$ pour laquelle : $A = p(N)$. On pose en outre : $D = N - A$.

a) Montrer l'égalité : $\mathrm{tr}\big({}^tAN\big) = 0$.

b) Montrer que : ${}^tD \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})$. En déduire que : $\mathrm{tr}\big({}^tDA\big) = 0$.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{tr}\big({}^tAA\big) = 0$, puis que : $A = 0$. Qu'a-t-on montré dans cette question **10)** ?

11) Déduire des questions précédentes l'inégalité : $\dim \mathscr{N} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.