ENDOMORPHISMES ÉCHANGEURS

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est *échangeur* s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E pour lesquels : $\quad E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad$ et $\quad u(G) \subset F$.

On souhaite démontrer la caractérisation suivante des endomorphismes échangeurs.

Théorème (Caractérisation algébrique des endomorphismes échangeurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est échangeur.

(ii) Il existe deux endomorphismes $a, b \in \mathscr{L}(E)$ pour lesquels : $\quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad$ et $\quad u = a + b$.

1 IMPLICATION (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose u échangeur et on note F et G deux sous-espaces vectoriels de E pour lesquels : $\quad E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad$ et $\quad u(G) \subset F$. On note en outre p_F (resp. p_G) la projection sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F) et on pose : $\quad a = p_F u \quad$ et $\quad b = p_G u$.

1) Montrer que : $\quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad$ et $\quad u = a + b$.

La suite de ce problème est entièrement consacrée à la démonstration de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).

2 CAS D'UN AUTOMORPHISME

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est un automorphisme de E et qu'il existe deux endomorphismes $a, b \in \mathscr{L}(E)$ pour lesquels : $\quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad$ et $\quad u = a + b$.

2) a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, a$ et $\mathrm{Ker}\, b$ sont en somme directe.

b) En déduire que : $\quad E = \mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b$.

c) En déduire que u est échangeur.

3 RÉDUCTION AU CAS NILPOTENT

3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et A et B deux sous-espaces vectoriels de E stables par u pour lesquels : $\quad E = A \oplus B$. Montrer que si $u|_A$ et $u|_B$ sont échangeurs, alors u l'est aussi.

4) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On souhaite établir le résultat suivant, appelé la *décomposition de Fitting de E par rapport à u* : $\quad \exists\, p \in [\![1, n]\!], \quad E = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad \mathrm{Ker}\, u^k \subset \mathrm{Ker}\, u^{k+1} \quad$ et que $\mathrm{Ker}\, u^k$ et $\mathrm{Im}\, u^k$ sont stables par u.

b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel : $\quad \mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^{k+1}$. $\quad$ Cet entier que l'on notera p est appelé l'*indice de u*. On pourra distinguer le cas où u est injectif de celui où il ne l'est pas.

c) Montrer que pour tout $k \geqslant p$: $\quad \mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^p$.

d) En déduire que : $\quad E = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

e) Montrer que $u|_{\mathrm{Ker}\, u^p}$ est nilpotent et que $u|_{\mathrm{Im}\, u^p}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, u^p$.

5) On conserve les notations de la question **4)**, mais on suppose de plus qu'il existe deux endomorphismes $a, b \in \mathscr{L}(E)$ pour lesquels : $a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u = a + b$.

a) Montrer que u^2 commute à a et b.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}\, u^p$ et $\mathrm{Im}\, u^p$ sont stables par a et b.

c) On **ADMET** momentanément que tout endomorphisme nilpotent est échangeur. En déduire que u est échangeur.

4 Cas nilpotent

D'après le résultat de la question **5)c)**, l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) sera démontrée si on arrive à prouver que tout endomorphisme nilpotent est échangeur. La dernière partie de ce devoir, facultative, est consacrée à ce résultat.

6) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$.

a) Montrer que l'application $x \overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} \mathrm{ev}_x$ est un isomorphisme de E sur $\mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K}),\mathbb{K}\big)$, où, pour tout $x \in E$, on a noté ev_x la forme linéaire $\varphi \longmapsto \varphi(x)$ de E.

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ une famille libre de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. On pose : $B = \Big\{x \in E \mid \quad \forall i \in [\![1,r]\!], \quad \varphi_i(x) = 0\Big\}$.

b) Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et noter $\big(\varphi_1^\star, \ldots, \varphi_n^\star\big)$ la famille des formes coordonnées associée.

c) Montrer que : $\mathrm{ev}(B) = \mathrm{Vect}\big(\varphi_{r+1}^\star, \ldots, \varphi_n^\star\big)$. Que vaut donc la dimension de B ?

À présent, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose u nilpotent d'indice p, i.e. que : $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

7) a) Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ pour lequel : $u^{p-1}(y) \neq 0_E$, puis calculer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\Big(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\Big)$, qu'on notera désormais A.

b) En déduire que : $p \leqslant n$.

c) Montrer que si : $p = n$, alors u est échangeur.

On suppose désormais que : $p \in [\![1, n-1]\!]$.

8) a) Justifier l'existence d'une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ pour laquelle : $\varphi\big(u^{p-1}(y)\big) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $\Big(\varphi, \varphi \circ u, \ldots, \varphi \circ u^{p-1}\Big)$ est libre.

On pose : $B = \Big\{x \in E \mid \quad \forall i \in [\![0, p-1]\!], \quad \varphi\big(u^i(x)\big) = 0\Big\}$.

9) Montrer que A et B sont stables par u.

10) a) Montrer que A et B sont en somme directe.

b) En déduire que : $E = A \oplus B$.

11) Achever de montrer que u est échangeur.