Équations de Mordell

On appelle *équations de Mordell* les équations diophantiennes de la forme : $y^2 = x^3 + k$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ avec $k \in \mathbb{Z}$ fixé. On sait beaucoup de choses sur ces équations, en particulier qu'elles possèdent toujours un nombre fini de solutions — mais c'est un résultat difficile. Ce devoir se donne pour objectif modeste de vous aider à résoudre deux de ces équations.

On rappelle à toutes fins utiles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, si ab est un cube parfait alors a et b en sont aussi.

1 Équation de Mordell $y^2 = x^3 + 16$

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que : $y^2 = x^3 + 16$ et que y est impair.

a) Montrer que pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$ impairs : $y + 4 = a^3$ et $y - 4 = b^3$.

b) Montrer que : $a = b + 8$, puis conclure.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que : $y^2 = x^3 + 16$ et que y est pair.

a) Montrer que x et y sont divisibles par 4.

On peut donc se donner deux entiers x' et y' pour lesquels : $x = 4x'$ et $y = 4y'$.

b) Montrer que y' est impair.

On peut donc se donner un entier n pour lequel : $y' = 2n + 1$.

c) Montrer que n et $n + 1$ sont des cubes parfaits, puis en déduire x.

3) Résoudre l'équation de Mordell : $y^2 = x^3 + 16$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

2 Équation de Mordell $y^2 = x^3 - 5$

4) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que : $y^2 = x^3 - 5$.

a) Étudier la parité de y et calculer le reste de la division euclidienne de x par 4.

b) Montrer que $x^2 + x + 1$ possède un facteur premier p congru à 3 modulo 4.

c) Montrer que pour un certain $n \in \mathbb{Z}$: $n^2 \equiv -1 \ [p]$.

d) Calculer n^{p-1} modulo p de deux manières différentes, puis conclure.