Équations différentielles

Ce devoir se donne pour but de vous emmener plus loin que les simples calculs que nous avons faits en cours et en TD. Les trois parties qui suivent, indépendantes, vous conduiront naturellement à mener des calculs, mais aussi à raisonner finement.

1 Équation différentielle non linéaire $xy' - |y| = x^2$

On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathscr{E}$: $xy' - |y| = x^2$ qu'on souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$. La présence d'un facteur x devant y' va nous obliger à résoudre séparément $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ dans un premier temps, puis à nous demander si on peut obtenir des fonctions dérivables en 0 en accolant une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et une solution sur $\mathbb{R}_-^*$. La présence d'une valeur absolue apportera aussi son lot de complications.

1) Préliminaires : On note $\mathscr{E}^-$ l'équation différentielle : $xy' - y = x^2$ et $\mathscr{E}^+$ l'équation différentielle : $xy' + y = x^2$. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$.

- **a)** Résoudre $\mathscr{E}^-$ sur I.
- **b)** Résoudre $\mathscr{E}^+$ sur I.

2) Résolution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

- **a)** Déterminer les solutions strictement positives de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b)** Montrer que $\mathscr{E}$ ne possède pas de solution strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c)** Soit y une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que y **N'est PAS** strictement positive.
  - **i)** Montrer que y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - **ii)** Montrer que y s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un certain point α.
  - **iii)** Déduire du signe de y que pour tout $x > 0$: $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x} & \text{si : } x < \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si : } x > \alpha. \end{cases}$
  - **iv)** Que vaut la limite de y en 0^+ ?
- **d)** Réciproquement, soit $\alpha > 0$. On note y la fonction obtenue en **c)iii)**. D'après tout ce qui précède, y est solution de $\mathscr{E}$ sur $]0, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$. Montrer que y est dérivable en α en étudiant son taux d'accroissement en α à gauche et à droite. En déduire que y est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.
- **e)** Quelles sont finalement toutes les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

3) Résolution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$:

- **a)** Soit y une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
  - **i)** Montrer, en exploitant les résultats précédents, que y est de la forme $x \longmapsto x(x+\lambda)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour un certain $\lambda \geqslant 0$.
  - **ii)** Montrer que $x \longmapsto y(-x)$ est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
- **b)** En déduire finalement les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2 Solutions périodiques

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période $T > 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle : $y' + ay = \varphi$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute solution y d'$\bigstar$, la fonction $x \longmapsto y(x+T)$ est aussi solution d'$\bigstar$.

2) Soit y une solution d'$\bigstar$. Montrer que y est T-périodique si et seulement si : $y(0) = y(T)$.

3) Montrer que $\bigstar$ possède une et une seule solution T-périodique.

3 Équation fonctionnelle $f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y)$

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, dites *solutions d'*★, pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y).$$

1) Soit f une solution d'★. On fait l'hypothèse supplémentaire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et n'est pas identiquement nulle.

a) Que vaut $f(0)$?

b) En dérivant par rapport à x, puis par rapport à y, montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f''(x+y)f(x-y) = f(x+y)f''(x-y).$$

c) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

d) En déduire que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad f'' + \alpha f = 0$, $\quad$ puis déterminer, en fonction de α, une expression explicite de f.

2) Vérifier que les fonctions trouvées en **1)d)** sont bel et bien solutions d'★.

3) Soit f une solution d'★ non identiquement nulle.

a) Montrer que pour un certain $\tau \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\displaystyle f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = f(x)f(y)$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_x^{x+\tau} f\left(\frac{t}{2}\right)^2\,\mathrm{d}t + \int_x^{x-\tau} f\left(\frac{t}{2}\right)^2\,\mathrm{d}t = f(x)\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que f est même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) Quelles sont finalement toutes les solutions d'★ ?