Équations différentielles

1 Équation fonctionnelle $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x > 0$: $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$.

Cette équation n'est pas différentielle car on n'y impose pas un lien entre $f(x)$ et $f'(x)$, mais un lien entre $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(x)$.

1) Analyse : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. On suppose que pour tout $x > 0$: $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$.

- **a)** Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b)** Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
- **c)** Résoudre l'équation de la question **b)** grâce au changement de variable : $x = \mathrm{e}^t$, puis en déduire f.

2) Synthèse : Conclure. Attention, il y a une VRAIE vérification à faire !

2 Équation différentielle non linéaire $xy' - 2|y| = x$

On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathscr{E}$: $xy' - 2|y| = x$, qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

La présence d'une valeur absolue dans cette équation en fait une équation différentielle NON LINÉAIRE, mais nous allons réussir à la résoudre tout de même en nous ramenant à des équations différentielles linéaires.

1) Préliminaires : On note $\mathscr{E}^-$ l'équation différentielle : $xy' - 2y = x$ et $\mathscr{E}^+$ l'équation différentielle : $xy' + 2y = x$. Soit I un intervalle quelconque inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

- **a)** Résoudre $\mathscr{E}^-$ sur I.
- **b)** Résoudre $\mathscr{E}^+$ sur I.

2) Résolution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

- **a)** Soit y une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - **i)** Montrer que y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - **ii)** Montrer que y n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - **iii)** Montrer que y n'est pas strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b)** Montrer pour conclure que les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x^2} & \text{si : } x \in \left]0, \alpha\right] \\ \dfrac{x(x-\alpha)}{\alpha} & \text{si : } x \in \left[\alpha, +\infty\right[\end{cases}$, α décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

3 ÉQUATION FONCTIONNELLE $\quad f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) **Analyse :** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On suppose en outre f non nulle sur $\mathbb{R}$.

   a) Montrer qu'en fait f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $f(0)$ et montrer que : $\quad f'(0) = 2$.

   c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x)f''(y) = f'''(x)f(y)$.

   d) En déduire que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad f'' + \alpha f = 0$, $\quad$ puis déterminer, en fonction de α, une expression explicite de f.

2) **Synthèse :** Conclure. Attention, il y a une **VRAIE** vérification à faire !