ÉTUDE APPROFONDIE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles : $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \dfrac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{S}$ pour laquelle : $u_0 = x$ et $u_1 = y$ est notée $\big(u_n(x,y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en l'absence de toute ambiguïté si x et y sont fixés. En cas d'existence, sa limite est notée $\ell(x,y)$.

1 DÉLICATES VARIATIONS

1) a) Déterminer les suites constantes de $\mathscr{S}$.

b) Quelles sont les limites possibles d'une suite de $\mathscr{S}$?

Pour toute limite possible $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ trouvée en **1)b)**, on note E_α l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ pour lesquels $\big(u_n(x,y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

2) a) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont trois termes consécutifs sont égaux est constante.

b) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont deux termes consécutifs sont égaux à 1 est constante.

c) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont un terme autre que les deux premiers est nul est constante.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$. Comparer les signes de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et $u_{n+2} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ **NON** constante. Montrer que si u_{N+2} est supérieur ou égal à u_N et u_{N+1} pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\geqslant N+1}$ est croissante.

On peut montrer de même que si u_{N+2} est inférieur ou égal à u_N et u_{N+1} pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\geqslant N+1}$ est décroissante.

5) Justifier l'existence de $\ell(2,0)$ et le calculer.

6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ **NON** constante. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone à partir d'un certain rang.

a) Montrer que $u_{n+2} - u_n$ et $u_{n+3} - u_{n+1}$ sont de signes opposés pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

7) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ possède une limite et que les ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides.

8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ **NON** constante. Montrer que si u_N et u_{N+1} sont supérieurs ou égaux à 1 pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang de limite $+\infty$.

On peut montrer de même que si u_N et u_{N+1} sont inférieurs ou égaux à 1 pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang de limite nulle.

2 QUEL INFINI ?

On se donne dans cette partie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ de limite $+\infty$. On s'intéresse à la vitesse à laquelle u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pose pour cela pour tout $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln \dfrac{u_n}{2}$.

9) a) Pourquoi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante à partir d'un certain rang ? On note N un tel rang.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\dfrac{u_n^2}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n^2}{2} + u_n$.

c) Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\geqslant 2}$.

d) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{2}{u_n}\right)$, $\quad$ puis que pour tous $n \geqslant N$ et $p \geqslant n$:

$$0 \leqslant v_p - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{2}{u_n}\right).$$

e) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha > 0$ et que pour tout $n \geqslant N$: $\quad 0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{2}{u_n}\right)$. $\quad$ On ne cherchera pas à calculer α.

f) En déduire finalement que pour un certain $\beta > 1$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\beta^{2^n}} = 2$.

3 Description des ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$

Cette dernière partie est facultative.

10) Comparer $\ell(x,y)$ et $\ell(x',y')$ pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ pour lesquels : $\quad x \leqslant x' \quad$ et $\quad y \leqslant y'$.

11) Soient $(x,y) \in E_1$ et $(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ distincts pour lesquels : $\quad x \leqslant x' \quad$ et $\quad y \leqslant y'$.

a) Montrer que : $\quad u_2(x,y) < u_2(x',y') \quad$ et $\quad u_3(x,y) < u_3(x',y')$.

On pose : $\quad \varepsilon = \min\left\{u_2(x',y') - u_2(x,y)\ ,\ u_3(x',y') - u_3(x,y)\right\}$.

b) Déduire des résultats de la partie **1** que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n(x,y) + u_{n+1}(x,y) \geqslant 1$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad u_n(x,y) + \varepsilon \leqslant u_n(x',y')$.

d) En déduire que : $\quad (x',y') \in E_{+\infty}$.

12) Soient $(x,y) \in E_1$ et $(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ distincts pour lesquels : $\quad x' \leqslant x \quad$ et $\quad y' \leqslant y$. $\quad$ Déduire des questions précédentes que : $\quad (x',y') \in E_0$.

13) a) Montrer que l'ensemble $\left\{x \geqslant 0 \mid \ \ell(x,0) = 0\right\}$ possède une borne supérieure a inférieure ou égale à 2.

b) Déterminer $\ell(x,0)$ pour tout $x \geqslant 0$ distinct de a.

14) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto u_n(x,0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

15) Dans cette question, on fait l'hypothèse que : $\quad \ell(a,0) = 0$.

a) Justifier l'existence d'un entier N pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $\quad u_n(a,0) < \dfrac{1}{2}$.

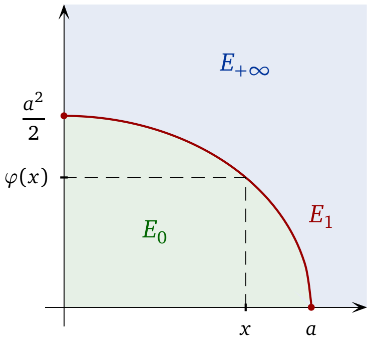
Par continuité des fonctions $x \longmapsto u_N(x,0)$ et $x \longmapsto u_{N+1}(x,0)$ en a, il existe un réel $\varepsilon > 0$ pour lequel pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$: $\quad \left|u_N(x,0) - u_N(a,0)\right| < \dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad \left|u_{N+1}(x,0) - u_{N+1}(a,0)\right| < \dfrac{1}{2}$.

b) Majorer $u_N(x,0)$ et $u_{N+1}(x,0)$ pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, puis en déduire une contradiction.

16) En adaptant la preuve de la question **15)**, montrer que : $\quad \ell(a,0) \neq +\infty$.

On a ainsi démontré que : $\quad \ell(a,0) = 1$.

On peut montrer en travaillant un peu plus que pour tout $x \in [0,a]$, il existe un et un seul $y \geqslant 0$ pour lequel : $\quad (x,y) \in E_1$. $\quad$ En notant $\varphi(x)$ ce réel y, on définit une fonction $\varphi : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Cette fonction φ est continue strictement décroissante et son graphe est exactement l'ensemble E_1. En fait, E_0 est l'ensemble des points du quart de plan $\mathbb{R}_+^2$ situés sous le graphe de φ et $E_{+\infty}$ est l'ensemble des points situés au-dessus.



Pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $n \in \mathbb{N}$, la relation naturelle : $\quad u_n\left(y, \dfrac{x^2+y^2}{2}\right) = u_{n+1}(x,y)$ montre après passage à la limite que : $\quad \ell\left(y, \dfrac{x^2+y^2}{2}\right) = \ell(x,y)$. $\quad$ En particulier, pour tout $x \in [0,a]$: $\quad \ell\left(\varphi(x), \dfrac{x^2+\varphi(x)^2}{2}\right) = \ell\big(x,\varphi(x)\big) = 1$, $\quad$ donc par unicité de $\varphi\big(\varphi(x)\big)$:

$$\boxed{\varphi\big(\varphi(x)\big) = \frac{x^2+\varphi(x)^2}{2}.}$$

En évaluant en a par exemple, on obtient la valeur de $\varphi(0)$: $\quad \varphi(0) = \dfrac{a^2}{2}$.