Euler-Maclaurin et la factorielle

1 Polynômes de Bernoulli

1) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $\Omega(P) = \left(\Delta(P), \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

On définit ainsi une application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ et une application Ω de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$.

a) Exprimer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que $\Omega|_{\mathbb{R}_{p+1}[X]}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ sur $\mathbb{R}_p[X] \times \mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que Ω est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$.

Il découle de ce résultat que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un et un seul polynôme $B_p \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel :

$$B_p(X+1) - B_p(X) = pX^{p-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_p(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ce polynôme B_p est appelé le $p^{\text{ème}}$ *polynôme de Bernoulli*, et on pose en outre $B_0 = 1$.

d) Calculer B_1 et B_2.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre de Bernoulli* le réel $\beta_p = B_p(0)$.

a) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$: $B_p(1) = \beta_p$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $B'_{p+1} = (p+1)B_p$.

c) En déduire, grâce à la formule de Taylor polynomiale, que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $B_p(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k} X^k$.

d) En déduire que pour tout $p \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \beta_k = 0$.

e) Calculer β_p pour tout $p \in [\![0,3]\!]$ et montrer que les nombres de Bernoulli sont tous rationnels.

f) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$. Qu'en déduit-on sur les nombres de Bernoulli ?

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\widetilde{B}_p$ la fonction $x \longmapsto B_p\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\widetilde{B}_p$ est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geqslant 2$. Qu'en est-il de $\widetilde{B}_1$?

2 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

4) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$f(1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\right) + (-1)^{r+1} \int_0^1 \frac{B_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(k+1) - f^{(p-1)}(k)\right) + (-1)^{r+1} \int_k^{k+1} \frac{\widetilde{B}_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) En déduire que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(n) - f^{(p-1)}(0)\right) + (-1)^{r+1} \int_0^n \frac{\widetilde{B}_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce résultat est appelé la *formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*.

3 Un petit bout d'intégrales généralisées

5) Soit $\varphi \in \mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que la fonction $m \longmapsto \int_1^m \big|\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que la fonction $m \longmapsto \int_a^m \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ possède une limite finie en $+\infty$ pour tout $a \geqslant 1$, notée $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
On pourra observer que $0 \leqslant \varphi + |\varphi| \leqslant 2|\varphi|$.

b) Montrer que pour tous $a, b \geqslant 1$: $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Plus fort que Stirling

6) a) Montrer, en appliquant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, que pour tous $r \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \left(1 - \sum_{p=2}^{r} \frac{\beta_p}{p(p-1)}\right) + \sum_{p=2}^{r} \frac{\beta_p}{p(p-1)\,n^{p-1}} + \frac{1}{r}\int_1^n \frac{\widetilde{B}_r(x)}{x^r}\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_r(x)}{x^r}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$ pour tout $r \geqslant 2$ après avoir justifié la bonne définition de l'intégrale.

c) En déduire l'existence d'un réel A indépendant de n et r pour lequel pour tous $r \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + A + \sum_{p=2}^{r-1} \frac{\beta_p}{p(p-1)\,n^{p-1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right).$$

d) Montrer que $A = \ln\sqrt{2\pi}$ en admettant l'équivalent de Stirling.

e) En déduire le développement asymptotique suivant de la factorielle :

$$n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}\,\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$