Exercices d'algèbre linéaire

1 Commutant d'une matrice carrée

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant de A* l'ensemble $\mathscr{C}(A)$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à A. On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ pour un certain $P \in \mathbb{K}[X]$, et l'ensemble de ces matrices est noté $\mathbb{K}[A]$.

On cherche à calculer la dimension de $\mathscr{C}(A)$ dans quelques cas particuliers et à comparer les ensembles $\mathscr{C}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$.

1) **a)** Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $\mathbb{K}[A]$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2) On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

b) Est-il vrai que : $\mathscr{C}(A) = \mathbb{K}[A]$? On pourra calculer $(A - I_3)^2$.

3) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$ distincts.

a) Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

b) Montrer que la famille $\left(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}\right)$ est libre. Est-il vrai que : $\mathscr{C}(D) = \mathbb{K}[D]$?

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse que $\mathscr{C}(A)$ est de dimension 3. Pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i, j), égal à 1.

a) Montrer, par un argument de dimension, que : $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\big(E_{11}, E_{21}\big) \neq \{0\}$ et $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\big(E_{12}, E_{22}\big) \neq \{0\}$.

b) En déduire que A est diagonale, puis dénicher une contradiction.

5) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale **par blocs** de la forme : $D = \begin{pmatrix} d_1 I_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_r I_{p_r} \end{pmatrix}$ pour certains $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{K}$ distincts. En particulier : $n = p_1 + \ldots + p_r$.

a) Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix}$, M_1 décrivant $\mathscr{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, …, M_r décrivant $\mathscr{M}_{p_r}(\mathbb{K})$.

b) En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

2 Une récurrence linéaire d'ordre 3

On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = 12u_{n+1} - 16u_n$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) **a)** Montrer qu'il existe exactement deux réels non nuls r pour lesquels la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E. On les notera α et β avec : $\alpha < \beta$.

b) Vérifier que la suite $(n\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi élément de E.

c) Montrer que les trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

3) On note à présent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $b_1 = 1$ et $b_0 = b_2 = 0$, et enfin $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $c_2 = 1$ et $c_0 = c_1 = 0$.

a) Montrer que les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

b) Montrer que toute suite de E est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que toute suite de E s'écrit d'une et une seule manière sous la forme $\left(\lambda\alpha^n + (\mu n + \nu)\beta^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

4) On note finalement B l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E pour lesquelles : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \mathrm{e}^{-n} = 0$.

a) Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Déterminer la dimension de B.