EXPONENTIELLES TRONQUÉES

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **5)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

On a vu à plusieurs reprises cette année que $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ceci en tête, on pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(nx)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}.$$

Ce devoir se donne pour objectif de déterminer un équivalent de $T_n(x)$ pour tout $x \in]0,1]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On ADMET la *formule de Stirling* : $\quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

1 ÉQUIVALENT DE $T_n(x)$ POUR $x < 1$

1) a) Montrer, en appliquant notamment la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n(1+x)} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_0^x \left(t\,e^{-t}\right)^n \,dt.$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\quad e\,x \leqslant e^x \quad$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$: $\quad \int_0^x \left(t\,e^{-t}\right)^n dt \leqslant x^{n+1} e^{-nx}, \quad$ puis que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})$.

d) En déduire un équivalent simple de $T_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $x \in]0,1[$.

2) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 1$: $\quad T_n(x) \leqslant x^n e^n, \quad$ puis que $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})$.

2 INTÉGRALE DE GAUSS

3) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $\quad \left|e^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2} \max\left\{1, e^u\right\}$.

4) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$.

a) Étudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tous $h \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$: $\quad \left|e^{-h(t^2+1)} - 1 + h\left(t^2+1\right)\right| \leqslant 2h^2 e^{2|h|}$.

c) En déduire que pour tous $x \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$: $\quad \left|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 e^{-x(t^2+1)}\,dt\right| \leqslant 2h^2 e^{2|h|}$.

d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \geqslant 0$: $\quad f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(t^2+1)}\,dt$.

5) On pose pour tout $x \geqslant 0$: $\quad g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + f\left(x^2\right)$.

a) Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa valeur.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qu'on note aussi : $\quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad$ (*intégrale de Gauss*).

3 Méthode de Laplace

6) Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^3\big([0,a],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f est strictement négative sur $]0,a]$, que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f''(0) = -p$ pour un certain $p > 0$.

a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $\left|e^u - 1\right| \leqslant e^{|u|}\,|u|$.

b) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ pour lequel pour tout $t \in [0,a]$: $\left|f(t) + \dfrac{pt^2}{2}\right| \leqslant Mt^3$.

On pose $b = \min\left\{a, \dfrac{p}{4M}\right\}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\displaystyle\int_0^b e^{nf(t)}\,dt - \int_0^b e^{-\frac{npt^2}{2}}\,dt\right| \leqslant Mn\displaystyle\int_0^b t^3\,e^{-\frac{npt^2}{4}}\,dt$.

d) Montrer, en calculant explicitement cette intégrale, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^b t^3\,e^{-\frac{pnt^2}{4}}\,dt \leqslant \frac{8}{n^2p^2}$.

e) Montrer que : $\displaystyle\int_b^a e^{nf(t)}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, puis que : $\displaystyle\int_0^a e^{nf(t)}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2np}}$.

7) Soient $a < 0$ et $f \in \mathscr{C}^3\big([a,0],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f est strictement négative sur $[a,0[$, que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f''(0) = -p$ pour un certain $p > 0$.

Déduire du résultat de la question **5)e)** que : $\displaystyle\int_a^0 e^{nf(t)}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2np}}$.

4 Équivalent de $T_n(x)$ pour $x = 1$

8) a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t\,e^{-t}\right)^n\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t\,e^{-t}\right)^n\,dt = e^{-n}\int_{-\frac{1}{2}}^0 e^{n\left(\ln(1+t)-t\right)}\,dt$.

c) En déduire que $R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}$, puis déterminer un équivalent simple de $T_n(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On peut montrer, en adaptant la méthode de Laplace, que pour tout $x > 1$: $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{n+1}\,e^n}{(x-1)\sqrt{2n\pi}}$.
On peut par ailleurs redémontrer la formule de Stirling à partir de la méthode de Laplace.