Flânerie rationnelle

Les deux parties de ce petit devoir sont indépendantes.

1 Une fois pour toutes !

Soient $x_1, \ldots, x_n < 0$ distincts avec $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On pose $Q = (X - x_1) \ldots (X - x_n)$. La décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - x_k}$ pour certains $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

2) En déduire que : $\int_0^s \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} -\sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \ln|x_k|$, ce qu'on note aussi $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \ln|x_k|$.

2 Inégalité de Bernstein

1) Justifier l'existence du réel $\|P\| = \sup_{u \in \mathbb{U}} \left|P(u)\right|$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On fixe à présent une fois pour toutes un entier naturel n. On souhaite établir l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité de Bernstein) Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$: $\|P'\| \leqslant n\,\|P\|$.

2) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les n racines distinctes de $X^n + 1$ et on pose $R_p = \frac{X^p}{X^n + 1}$.

a) Montrer que $R'_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{p+1}}{(X - z_k)^2}$.

b) En déduire que $p = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{p+1}}{(1 - z_k)^2}$.

3) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$: $XP' = \frac{n}{2} P + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(1 - z_k)^2} P(z_k X)$.

On commencera par prouver le résultat pour les polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

4) **a)** Montrer que $\frac{u}{(1-u)^2}$ est un réel négatif pour tout $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|1 - z_k|^2} = \frac{n^2}{4}$.

5) Conclure.