Formule de Héron et minoration d'un maximum

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Formule de Héron

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$, on pose : $\mathscr{A}(a,b,c) = \mathscr{A}(abc) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\big(\overline{b-a}\big)(c-a)\Big)$. Ce réel sera bientôt par définition l'*aire orientée du triangle abc*, mais une telle définition ne paraîtra convaincante que si la formule proposée satisfait les propriétés usuelles d'une aire.

1) Calculer $\mathscr{A}(abc)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$, puis commenter sur ce cas particulier l'appellation « aire orientée ».

2) **a)** Comparer $\mathrm{Im}\big(\overline{u}v\big)$ et $\mathrm{Im}\big(u\overline{v}\big)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$: $\mathscr{A}(cba) = -\mathscr{A}(abc)$. On pourra observer : $b-c = (b-a)+(a-c)$.

c) Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$: $\mathscr{A}(bca) = \mathscr{A}(abc)$.

Ces résultats montrent que le réel $\mathscr{A}(abc)$ dépend du triangle **orienté** abc indépendamment de l'ordre dans lequel on écrit ses sommets — à condition tout de même qu'on en respecte l'orientation.

3) **a)** Soient $\lambda \in \mathbb{U}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On note f l'isométrie directe $z \longmapsto \lambda z + \mu$. Exprimer $\mathscr{A}\big(f(a)\,f(b)\,f(c)\big)$ en fonction de $\mathscr{A}(abc)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$.

b) Montrer, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, l'existence d'une isométrie directe f pour laquelle : $f(a) = 0$ et $f(b) = |b-a|$.

En principe, vous devriez être maintenant convaincus que le réel $\mathscr{A}(abc)$ est l'aire orientée du triangle abc pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dans le cas contraire, demandez-vous si vous avez compris en quoi les questions **1)**, **3)a)** et **3)b)** sont liées.

4) Soit abc un triangle. On pose : $A = |b-c|$, $B = |c-a|$, $C = |a-b|$ et $D = \frac{A+B+C}{2}$.

a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$: $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(\overline{u}v\big)$.

b) En déduire que : $B^2 + C^2 - A^2 = 2\,\mathrm{Re}\Big(\big(\overline{b-a}\big)(c-a)\Big)$.

c) En déduire que : $16\,\mathscr{A}(abc)^2 = (A+B+C)(A+B-C)(A-B+C)(-A+B+C)$.

d) En déduire la *formule de Héron* : $\big|\mathscr{A}(abc)\big| = \sqrt{D(D-A)(D-B)(D-C)}$. Cette formule relie l'aire du triangle abc à la seule longueur de ses côtés. Elle a été découverte et démontrée par le mathématicien et physicien Héron d'Alexandrie au 1^{er} siècle après J.-C.

5) On conserve les notations de la question **4)**. On suppose cependant que les points a et b sont fixés de même que le périmètre du triangle abc, mais que le point c est variable.

a) Déterminer une expression de $\big|\mathscr{A}(abc)\big|$ en fonction de A, C et D seulement.

b) Montrer que l'aire non orientée $\big|\mathscr{A}(abc)\big|$ est maximale si et seulement si le triangle abc est *isocèle en c*, autrement dit si et seulement si : $A = B$.

La longueur du côté $[a, b]$ et le périmètre du triangle abc étant fixés, le résultat de la question **b)** décrit exactement deux triangles isocèles, l'un direct, l'autre indirect, selon la position de c par rapport au côté $[a, b]$.

2 Minoration d'un maximum

On souhaite prouver la minoration suivante.

Théorème Soient $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $p \in [\![1, 2n]\!]$: $\displaystyle S_p = \sum_{k=1}^{n} e^{ip\theta_k}$. Alors : $\displaystyle \max_{1 \leqslant p \leqslant 2n} |S_p| \geqslant \sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

On pose pour tous $x \in \mathbb{R}$: $D_0(x) = 1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$D_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{r} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad F_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{k}{r}\right) \cos(kx).$$

1) **a)** Montrer, en développant : $(1-\cos x)\,D_r(x)$, que pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$: $\displaystyle D_r(x) = \frac{\cos(rx) - \cos\big((r+1)x\big)}{1 - \cos x}$.

b) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle F_r(x) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} D_k(x)$. En déduire $F_r(0)$.

c) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_r est à valeurs réelles positives ou nulles.

2) **a)** Montrer que pour tout $p \in [\![1, 2n]\!]$: $\displaystyle |S_p|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \cos\big(p(\theta_i - \theta_j)\big)$.

b) En déduire que : $\displaystyle \sum_{p=1}^{2n} \left(1 - \frac{p}{2n+1}\right) |S_p|^2 = -\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} F_{2n+1}(\theta_i - \theta_j)$.

c) Conclure. On commencera par distinguer les cas « $i = j$ » et « $i \neq j$ » dans la somme « $\displaystyle \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ » de la question **b)**.