FRACTIONS CONTINUES

On définit par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application $(t_0, \dots, t_n) \longmapsto F_n(t_0, \dots, t_n)$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout $t_0 > 0$: $F_0(t_0) = t_0$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \dots, t_{n+1} > 0$: $F_{n+1}(t_0, \dots, t_{n+1}) = t_0 + \dfrac{1}{F_n(t_1, \dots, t_{n+1})}$.

On **ADMET** qu'une telle définition est bien possible et que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \dots, t_n > 0$: $F_n(t_0, \dots, t_n) > 0$. Les applications ainsi construites sont appelées des *fractions continues*.

Par exemple : $F_3(1,2,3,4) = 1 + \dfrac{1}{F_2(2,3,4)} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{F_1(3,4)}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{F_0(4)}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}}$.

1) Un exemple : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = F_n(2, \dots, 2)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite. On pourra s'intéresser aux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Une nouvelle définition récursive : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $t_0, \dots, t_{n+1} > 0$:

$$F_{n+1}(t_0, \dots, t_{n+1}) = F_n\left(t_0, \dots, t_{n-1}, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right).$$

3) Un résultat universel de convergence : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} p_1 = 1 + a_0 a_1 \\ q_1 = a_1, \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} p_{n+2} = p_{n+1} a_{n+2} + p_n \\ q_{n+2} = q_{n+1} a_{n+2} + q_n. \end{cases}$

On **ADMET** pour gagner du temps que p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier la monotonie stricte de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

c) En déduire que les suites $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\ell - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2}$. On pourra remarquer que ℓ est compris entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

e) En déduire que ℓ est irrationnel.

f) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$: $F_{n+2}(a_0, \dots, a_{n+1}, t) = \dfrac{p_{n+1} t + p_n}{q_{n+1} t + q_n}$.

g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n(a_0, \dots, a_n) = \dfrac{p_n}{q_n}$.

Conclusion : la suite de rationnels $\big(F_n(a_0, \dots, a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel, et ceci quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls choisie au départ.

4) Développement d'un irrationnel en fraction continue : Soit x un irrationnel supérieur à 1.

a) Justifier la bonne définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.

b) Montrer que a_n est un entier naturel non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut dès lors associer à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme à la question **3)**.

c) Montrer, en exploitant notamment le résultat de la question **3)f)**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x = \dfrac{p_{n+1} x_{n+2} + p_n}{q_{n+1} x_{n+2} + q_n}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|x - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{q_{n+1}^2}$, puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a_0, \dots, a_n) = x$.

Conclusion : $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \dots}}}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée le *développement de x en fraction continue*.

5) Une suite non convergente : Cette dernière question est facultative. On **ADMET** que π est irrationnel.

a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n\sin n}$.

Raisonnant par l'absurde, on fait l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que : $\ell = 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$. On pourra par exemple écrire $\sin x$ comme une intégrale.

d) Conclure en exploitant le résultat de la question **4)d)**.

Les fractions continues interviennent en divers endroits des mathématiques, par exemple en arithmétique et en théorie des nombres. À titre de curiosité, le mathématicien soviétique Khintchine et le mathématicien français Paul Lévy ont montré en 1936 que quand on se donne au hasard un irrationnel x, la suite $\left(\sqrt[n]{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question **4)** converge vers $e^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}}$ avec probabilité 1 — i.e. non pas a priori pour tout irrationnel x, mais **POUR PRESQUE TOUT** irrationnel x, en un sens à préciser...