Fractions rationnelles et localisation des racines

On s'intéresse dans ce devoir à la *localisation des racines* d'un polynôme, c'est-à-dire à des résultats qui garantissent que les racines d'un polynôme donné sont situées dans telle ou telle région du plan complexe.

1 Formule des résidus

Pour tous $F \in \mathbb{C}(X)$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle *résidu de F en a* et on note $\mathrm{Res}(F,a)$ le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$.

Soit $r > 0$ fixé une fois pour toutes.

1) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{C} \setminus r\mathbb{U}$ et $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a)^k}\,\mathrm{d}t = 0.$

2) a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, si : $|\lambda| < 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda^n \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon i n t}}{1-\lambda \mathrm{e}^{\varepsilon i t}}\,\mathrm{d}t = 0.$

b) En déduire, en exploitant une certaine somme géométrique, que pour tout $a \in \mathbb{C}$, si : $|a| < r$, alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

c) Montrer de même que pour tout $a \in \mathbb{C}$, si : $|a| > r$, alors : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = 0.$

3) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Montrer que si aucun pôle de F n'est de module r, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \sum_{z\in\mathscr{P}} \mathrm{Res}(F,z) \qquad \text{(\textit{formule des résidus})}$$

où $\mathscr{P}$ est l'ensemble des pôles de F de module strictement inférieur à r.

2 Théorème de Rouché

4) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,2\pi],\mathbb{C})$. On suppose que f ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$ et que sa partie réelle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors : $x = \mathrm{Re}(f)$, $y = \mathrm{Im}(f)$ et $g = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$.

a) Montrer que g est une primitive de $\dfrac{f'}{f}$ sur $[0,2\pi]$.

b) Que vaut l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ si : $f(0) = f(2\pi)$?

5) Soient $P,Q \in \mathbb{C}[X]$ et $r > 0$. On suppose que pour tout $z \in r\mathbb{U}$: $\left|P(z)-Q(z)\right| < \left|Q(z)\right|$ et on pose : $F = \dfrac{P}{Q}$.

a) Montrer que P et Q ne s'annulent pas sur $r\mathbb{U}$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 0.$

c) Montrer que : $\dfrac{F'}{F} = \dfrac{P'}{P} - \dfrac{Q'}{Q}.$

d) En déduire que P et Q ont le même nombre de racines comptées avec multiplicité dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon r (*théorème de Rouché*). On pourra utiliser sans les redémontrer les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\dfrac{P'}{P}$ et $\dfrac{Q'}{Q}$ étudiées en TD.

6) On pose : $P = X^5 + 3X^3 + 1$.

a) Montrer que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

b) Montrer que P possède exactement trois racines distinctes dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. On pourra appliquer le théorème de Rouché à P et au polynôme $3X^3$.

c) Montrer que les racines de P sont toutes de module strictement inférieur à 2.

7) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour un certain $u \in \mathbb{U}$: $\left|P(u)\right| \geqslant 1$.

3 Disques de Jensen

La dernière partie de ce devoir est facultative et indépendante des précédentes.

Le théorème de Gauss-Lucas démontré en TD affirme que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$, toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des nombres $z_1, \ldots, z_r$. On s'intéresse ici à un autre résultat de localisation des racines de P' dans le cas d'un polynôme P à coefficients réels.

Théorème (Disques de Jensen) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_r, \overline{z_r}$ ses racines complexes non réelles distinctes avec pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $\mathrm{Im}(z_i) > 0$. Toute racine non réelle de P' appartient, pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$, au disque fermé de centre $\mathrm{Re}(z_i)$ et de rayon $\mathrm{Im}(z_i)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine non réelle fixée de P' pour laquelle : $\mathrm{Im}(z) > 0$.

8) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z-a}\right) < 0$.

9) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si z ne vaut ni $x + \mathrm{i}y$ ni $x - \mathrm{i}y$, alors :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z - x - \mathrm{i}y} + \frac{1}{z - x + \mathrm{i}y}\right) = \frac{y^2 - |z-x|^2}{\left|(z-x)^2 + y^2\right|^2} \times 2\,\mathrm{Im}(z).$$

10) Conclure. On pourra raisonner par l'absurde et s'appuyer sur la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ sur $\mathbb{C}$.