Genèse des triangles et points fixes de l'exponentielle

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Genèse des triangles

On se donne une fois pour toutes $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. On note A le module et α un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$, de sorte que : $\dfrac{c-a}{b-a} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. On introduit de même B, C, β et γ pour lesquels : $\dfrac{a-b}{c-b} = B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et $\dfrac{b-c}{a-c} = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$.

Vous allez faire semblant de ne **RIEN** savoir sur les triangles, car il s'agit ici justement de **DÉMONTRER** complètement par le calcul quelques résultats bien qu'on connaît tous sans trop savoir pourquoi on les connaît. Pour une fois, je ne veux voir **AUCUN** raisonnement géométrique !

1) **a)** Calculer la somme $\alpha + \beta + \gamma$ modulo 2π, ainsi que le produit $A \times B \times C$.

b) Montrer les égalités : $A\cos\alpha + \dfrac{\cos\beta}{B} = 1$ et $A\sin\alpha - \dfrac{\sin\beta}{B} = 0$, ainsi que les quatre autres égalités analogues faisant intervenir A, B, C, α, β et γ.

2) On souhaite **DÉMONTRER** l'équivalence suivante : $|a-b| = |b-c| = |c-a| \iff \alpha \equiv \beta \equiv \gamma\ [2\pi]$. Par définition, le triangle abc (ou bca ou cab) sera alors dit *équilatéral* s'il satisfait l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes.

a) Montrer l'implication directe.

b) On fait l'hypothèse, réciproquement, que : $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\ [2\pi]$.

i) Montrer que α est congru à $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$ ou π modulo 2π.

ii) Montrer qu'en fait : $\alpha \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

iii) En déduire que : $A = B = C = 1$, puis conclure.

3) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\alpha \in]0, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$. (ii) $\beta \in]0, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$. (iii) $\gamma \in]0, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$.

Par définition, le triangle abc (ou bca ou cab) est dit *direct* s'il l'une quelconques de ces trois assertions.

4) **a)** Montrer que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si : $c - a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b-a)$.

En d'autres termes, il est maintenant **DÉMONTRÉ** que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si la rotation de centre a et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ envoie le point b sur le point c.

b) Montrer que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si : $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$, on appelle *centre de gravité du triangle uvw* le nombre complexe $\dfrac{u+v+w}{3}$.

5) On suppose dans cette question que le triangle abc est direct. On note d, e et f les trois nombres complexes pour lesquels les triangles dba, ecb et fac sont équilatéraux directs, et p, q et r les centres de gravité respectifs des triangles dba, ecb et fac.

a) Déterminer une expression de p en fonction de a et b, de q en fonction de b et c, et de r en fonction de c et a.

b) Montrer que le triangle pqr est équilatéral direct.

c) Montrer que abc et pqr ont le même centre de gravité.

Le résultat des questions **b)** et **c)** est généralement appelé le *théorème de Napoléon*.

2 Points fixes de l'exponentielle

On s'intéresse aux points fixes de l'exponentielle complexe, i.e. aux nombres complexes z pour lesquels : $e^z = z$.

1) Pourquoi suffit-il qu'on détermine les points fixes de partie imaginaire positive ou nulle ?

On note φ la fonction $t \longmapsto t\,e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un point fixe de l'exponentielle complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$ et : $y \geqslant 0$.

a) Montrer que pour un certain $k \in \mathbb{N}$: $y = 2k\pi + \operatorname{Arccos} \varphi(x)$.

b) Montrer l'égalité : $e^x \sqrt{1 - \varphi(x)^2} - \operatorname{Arccos} \varphi(x) = 2k\pi$.

3) On note δ la fonction $t \longmapsto e^t \sqrt{1 - \varphi(t)^2} - \operatorname{Arccos} \varphi(t)$.

a) Etudier les variations de φ, puis montrer que l'ensemble de définition de δ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que δ est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^t \geqslant 1 + t$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation : $\delta(t) = 2k\pi$ d'inconnue $t \in [\alpha, +\infty[$ possède une et une seule solution x_k.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$: $y_k = 2k\pi + \operatorname{Arccos} \varphi(x_k)$.

d) Montrer que $x_k + iy_k$ est un point fixe de l'exponentielle complexe.

4) Qui sont finalement tous les points fixes de l'exponentielle complexe ?