Hölder, Minkowski et quelques broutilles

Les trois exercices suivants sont indépendants.

1 Un encadrement du logarithme

On souhaite prouver l'encadrement suivant :

Théorème Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $$\frac{6}{x+4\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \geqslant \dfrac{6}{x+4\sqrt{x}+1}$ en étudiant la fonction $x \longmapsto \ln x - \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$, dont la dérivée se factorise très bien en dépit des apparences.

2 Une inégalité de convexité

Cet exercice prolonge notre découverte des fonctions *convexes* en TD, mais les résultats que nous avons démontrés alors ne sont pas ici nécessaires.

1) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose f'' positive ou nulle sur I.
Montrer que pour tous $x, y \in I$: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

2) a) Étudier le signe de la dérivée seconde de la fonction $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tous $x, y > 0$: $1+\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}$.

c) En déduire que pour tous $a, b, c, d > 0$: $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$.

3 Inégalités de Hölder et Minkowski

On rappelle que pour tout $p > 0$: $0^p = 0$ par convention, ce qui la fonction $x \longmapsto x^p$ continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

En outre, pour tous $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $X+Y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ et $\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Définition **(Norme p d'une famille de réels)** Soient $p > 1$ et $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On appelle *norme p de X* le réel positif : $$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 2$, $\|X\|_2$ n'est jamais qu'une généralisation à n réels du concept de norme que vous calculez en géométrie du plan et de l'espace à partir des coordonnées dans une base orthonormale.

1) Montrer que pour tous $p > 1$, $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda X\|_p = |\lambda| . \|X\|_p$.

On souhaite démontrer les deux inégalités suivantes :

Théorème **(Inégalités de Hölder et Minkowski)** Soient $p, q > 1$ deux réels pour lesquels : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q \quad (\textit{inégalité de Hölder}) \qquad \text{et} \qquad \|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p \quad (\textit{inégalité de Minkowski}).$$

L'inégalité de Minkowski généralise clairement l'inégalité triangulaire que vous connaissez dans $\mathbb{C}$ ou en géométrie du plan et de l'espace. L'inégalité de Hölder semble plus mystérieuse, mais vous en connaissez en fait un cas particulier. Pour deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du plan, la relation suivante : $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| . \|\vec{y}\| \cos\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$, qui relie produit scalaire et norme, vous est familière. En particulier : $\left|\vec{x} \cdot \vec{y}\right| \leqslant \|\vec{x}\| . \|\vec{y}\|$, ou encore avec des coordonneés dans une base orthonormale : $\left|x_1y_1 + x_2y_2\right| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Cette inégalité n'est autre que l'inégalité de Hölder pour $p = q = n = 2$.

Dans les questions qui suivent, les notations sont celles du théorème.

2) **a)** Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$: $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$. On commencera par le cas où : $x, y > 0$.

b) En déduire l'inégalité de Hölder dans le cas particulier où : $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$.

c) En déduire l'inégalité de Hölder dans le cas général.

3) **a)** Appliquer l'inégalité de Hölder aux sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}$.

b) En déduire l'inégalité de Minkowski.