Inégalité arithmético-géométrique et inégalité de Carleman

Pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de x* et on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel positif ou nul r pour lequel : $r^n = x$.
On admettra que la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tous $x, y \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}.$$

1 L'inégalité arithmético-géométrique

On souhaite établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité arithmético-géométrique) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$.

Le réel : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ est appelé la *moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$*, et le réel : $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$ leur *moyenne géométrique*.

1) Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne aura-t-il subi sur ces trois années ?

2) **a)** Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x - 1$.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ des réels de moyenne arithmétique m. Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure.

2 L'inégalité de Carleman

On souhaite établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité de Carleman) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^n x_k$.

Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ fixés une fois pour toutes. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\displaystyle a_k = k\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

3) **a)** Simplifier le produit $a_1 \ldots a_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $a_1x_1, \ldots, a_kx_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

4) Simplifier : $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)$.

5) a) Montrer, en passant au logarithme, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^p \leqslant \mathrm{e}$.

b) Conclure.

On va montrer pour finir que la constante e est optimale dans l'inégalité de Carleman. On se donne pour cela un réel $C \geqslant 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant C \sum_{k=1}^n x_k$. On cherche à montrer que : $C \geqslant \mathrm{e}$.

6) a) Montrer sans calcul d'intégrale, par un raisonnement géométrique, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln x \, \mathrm{d}x \geqslant \ln k$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! \leqslant \dfrac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}$. On pourra d'abord dériver la fonction $x \longmapsto x \ln x - x$.

c) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sqrt[k]{(k-2)!} \leqslant \dfrac{k+1}{\mathrm{e}}$. On pourra remarquer que : $(k-2)! = \dfrac{(k-1)!}{k-1}$.

7) a) Montrer sans calcul d'intégrale, par un raisonnement géométrique, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

8) a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(k-2)!}} \leqslant C\left(2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}\right)$.

b) En déduire l'existence d'un réel λ pour lequel pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle (C-\mathrm{e}) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \lambda$, puis conclure.