Inégalité arithmético-géométrique et inégalité de Carleman

Pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de x* et on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel $r \geqslant 0$ pour lequel $r^n = x$. On admet que la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tous $x, y \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}.$$

On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a \leqslant b$ et pour toutes fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles $f \leqslant g$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (*croissance de l'intégrale*). À utiliser sans modération dans ce devoir !

1 L'inégalité arithmético-géométrique

On souhaite établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité arithmético-géométrique) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k.$

Le réel $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ est appelé la *moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$* et le réel $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$ leur *moyenne géométrique*.

1) Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne en pourcentage aura-t-il subi sur ces trois années ?

2) **a)** Montrer, en étudiant $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x - 1$.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ des réels de moyenne arithmétique m. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure.

2 L'inégalité de Carleman

On souhaite établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité de Carleman) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^n x_k.$

Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$. On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle a_k = k\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$

3) **a)** Simplifier le produit $a_1 \ldots a_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

b) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $a_1x_1, \ldots, a_kx_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

4) Simplifier $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right).$

5) **a)** Déduire du résultat de la question **2)a)** que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \leqslant \mathrm{e}.$

b) Conclure.

On cherche à présent à montrer que la constante e est optimale dans l'inégalité de Carleman. On se donne pour cela un réel $C \geqslant 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \leqslant C \sum_{k=1}^n x_k$. Il s'agit de prouver que $C \geqslant \mathrm{e}$.

6) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln t \, \mathrm{d}t \geqslant \ln k$ et calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto t \ln t - t$.

b) En déduire que $n! \leqslant \dfrac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que pour tout $k \geqslant 2$: $\sqrt[k]{(k-2)!} \leqslant \dfrac{k+1}{\mathrm{e}}$.

7) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, puis en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

8) a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(k-2)!}} \leqslant C\left(2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}\right)$.

b) En déduire l'existence d'un réel λ pour lequel pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle(C - \mathrm{e})\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \lambda$, puis conclure.

3 Un raffinement de l'inégalité arithmético-géométrique

Cette dernière partie est facultative. Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ avec $n \geqslant 2$. On pose :

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k, \qquad g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}, \qquad m = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique : $a \geqslant g$, mais on va obtenir un peu mieux.

9) a) Exprimer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i + x_j)$ et $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \sqrt{x_i x_j}$ en fonction de n, a et g.

b) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $\sqrt{x_i x_j}$ pour lesquels $1 \leqslant i < j \leqslant n$, que :

$$a - g \geqslant \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_i}\right)^2.$$

c) En déduire que $a - g \geqslant \dfrac{v}{8m}$.