INÉGALITÉ DE BERNSTEIN ET THÉORÈME DE MASON-STOTHERS

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $\theta \longmapsto \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle y possède un maximum d'après le théorème des bornes atteintes, que l'on notera $\|P\|$. On peut aussi dire que : $\|P\| = \sup\limits_{u \in \mathbb{U}} \left|P(u)\right|$.

On se donne à présent une fois pour toutes un entier naturel n. On souhaite établir l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité de Bernstein) Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$: $\|P'\| \leqslant n\,\|P\|$.

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les n racines distinctes du polynômes $X^n + 1$ et on pose : $R = \dfrac{X^p}{X^n + 1}$.

a) Montrer que : $R' = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{p+1}}{(X - z_k)^2}$. On pourra commencer par calculer la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$.

b) En déduire l'égalité : $p = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{p+1}}{(1 - z_k)^2}$. En particulier, on vient de montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(1 - z_k)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

2) On veut montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$: $XP' = \dfrac{n}{2}\,P + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(1 - z_k)^2}\,P(z_k X)$.

a) Montrer que le résultat est vrai pour les polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

b) Montrer que le résultat est vrai dans le cas général.

3) a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $\dfrac{u}{(1 - u)^2}$ est un réel négatif.

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|1 - z_k|^2} = \frac{n^2}{4}$.

4) Majorer $\left|P'(u)\right|$ pour tout $u \in \mathbb{U}$ au moyen des résultats précédents et conclure.

2 THÉORÈME DE MASON-STOTHERS

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on notera $r(P)$ le nombre de racines DISTINCTES de P dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer, grâce à la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{C}$, que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$: $\deg(P) = \deg\left(P \wedge P'\right) + r(P)$.

On souhaite établir le résultat suivant, démontré par Stothers en 1981, puis simplifié par Mason en 1984.

Théorème (Théorème de Mason-Stothers) Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes non constants premiers entre eux dans leur ensemble pour lesquels : $A + B + C = 0$. Alors : $\max\left\{\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right\} < r(ABC)$.

Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes non constants premiers entre eux dans leur ensemble pour lesquels : $A+B+C=0$.

2) Montrer que A, B et C sont premiers entre eux deux à deux.

3) **a)** Exprimer $A'B-AB'$ en fonction de A et C, puis montrer que $A'B-AB'$ est divisible par $C \wedge C'$.

b) Montrer que $A'B-AB'$ est divisible par le produit $\big(A\wedge A'\big)\big(B\wedge B'\big)\big(C\wedge C'\big)$.

c) Montrer que : $\deg\big(A'B-AB'\big) < \deg(A)+\deg(B)$, puis en déduire l'inégalité : $\deg(C) < r(A)+r(B)+r(C)$.

4) Conclure.

On s'intéresse à présent à un théorème de Liouville démontré 1879.

Théorème **(Théorème de Liouville)** Soient $n \geqslant 3$ et $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$. Si P, Q et R ne sont ni constants ni associés, alors :

$$P^n + Q^n \neq R^n.$$

5) Déduire le théorème de Liouville du théorème de Mason-Stothers. On commencera par se ramener au cas où les polynômes en jeu sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Le théorème de Liouville est l'analogue polynomial d'une célèbre conjecture de Fermat qu'on appelle le *grand théorème de Fermat*. Énoncée au cours de la première moitié du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, cette conjecture stipule que pour $n \geqslant 3$, l'équation diophantienne : $x^n + y^n = z^n$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{Z}$ non nuls n'a pas de solution. On ne peut pas dire que le problème ait en soi un grand intérêt. Les outils qu'il a suscités à travers les siècles se sont cependant avérés si riches qu'en dépit de son caractère anodin, le problème de Fermat est devenu l'un des problèmes les plus célèbres des mathématiques. Il aura fallu plus de trois siècles pour le résoudre et la contribution d'un grand nombre de grands mathématiciens. Le mathématicien Andrew Wiles clôt finalement le débat en 1994, mais en démontrant en fait un résultat d'une portée infiniment plus étendue que le problème initial.