INÉGALITÉS DIVERSES

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 ENCADREMENTS DU LOGARITHME

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Déterminer une expression simple de φ_n' pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k$.

2) a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On note f la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ et g la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Trouver des valeurs de a, b, c et d pour lesquelles g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et : $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$ et $g''(0) = f''(0)$.

b) Pour les valeurs de a, b, c et d trouvées en **a)**, montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\ln(1+x) \geqslant \frac{ax+b}{cx+d}$.

3) Montrer que l'inégalité de la question **2)b)** est meilleure que l'inégalité : $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ de la question **1)b)**.

2 ÉTUDE D'UN MAXIMUM

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction $x \longmapsto \left|\sin^n x \cos x\right|$ sur $\mathbb{R}$ et M_n son maximum.

1) Expliquer proprement pourquoi, pour calculer M_n, on peut se contenter d'étudier f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que M_n est atteint en un point de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la forme : $\operatorname{Arctan} \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$ à préciser.

3) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos(\operatorname{Arctan} t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ et simplifier de même : $\sin(\operatorname{Arctan} t)$.

b) En déduire, en utilisant le résultat de la question **1)** de l'exercice **2**, que : $M_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}$.

4) On fait maintenant varier l'entier n.

a) Pourquoi est-il vrai que : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$?

b) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, M_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Ce résultat prouve que lorsque n est grand, M_n est « proche » de la quantité $\frac{1}{\sqrt{n\mathrm{e}}}$.