Intersection des noyaux, somme des images

1 Un lemme

On s'intéresse dans une première partie au résultat suivant.

Théorème Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A et B commutent, alors : $\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

1) Montrer le résultat sous l'hypothèse que A est inversible.

2) On ne suppose plus A inversible.

a) Montrer qu'à partir d'un certain rang, la matrice $A + \frac{1}{p} I_n$ est inversible.

b) Conclure.

3) Trouver un contre-exemple au théorème dans le cas où A et B ne commutent pas.

2 Intersection des noyaux, somme des images

On souhaite à présent démontrer le résultat qui suit.

Théorème Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A et B commutent : $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Ker}\, B = \{0\} \iff \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B = \mathbb{C}^n$.

4) Prouver l'égalité : $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = n - \dim\big(\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Ker}\, B\big)$.

5) On suppose que : $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Ker}\, B = \{0\}$.

a) Montrer qu'on peut trouver deux matrices $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est inversible.

b) Conclure.

6) On suppose que : $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B = \mathbb{C}^n$.

a) Montrer qu'on peut trouver deux matrices $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles : $AD - BC = I_n$.

b) Conclure.