Introduction aux groupes orthogonaux

Dans ce devoir, n est un entier naturel non nul et toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, aussi appelée un *vecteur de* $\mathbb{R}^n$, est identifiée à la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $M^\top M = I_n$. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad M^\top M = I_n \right\}$ est appelé le *groupe orthogonal de degré n*.

Trois niveaux de difficulté/longueur : questions **1)** à **4)** incluse (piste verte), questions **1)** à **8)** incluse (piste bleue) ou toutes les questions (piste rouge).

1 Zoologie des groupes orthogonaux

1) a) À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice diagonale est-elle orthogonale ?

b) Montrer que pour tous $M \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ est orthogonale.

c) Montrer que l'ensemble $\left\{ aI_n + bJ_n \mid \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$ contient exactement 4 matrices orthogonales, où J_n est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

2) a) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\quad \mathrm{tr}\left(A^\top A\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0$.

b) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\quad M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad M$ est inversible d'inverse $M^\top$.
On pourra s'intéresser à la matrice $A = I_n - MM^\top$.

c) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est *stable par produit, inversion et transposition*, i.e. que pour tous $M, N \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

$$MN \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \qquad M^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad M^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

3) a) Montrer que $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $R_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$, (θ, ε) décrivant $\mathbb{R} \times \left\{ -1, 1 \right\}$.

b) Vérifier que $R_1(\varphi + \psi) = R_1(\varphi) R_1(\psi)$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, puis montrer que l'image de R_1, notée $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, est incluse dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, stable par produit et inversion et que ses éléments commutent deux à deux.

4) a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & L \\ 0 & M' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, L et M' la matrice M est-elle orthogonale ?

b) À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est-elle orthogonale ?

2 Isométries vectorielles

Dans cette partie, on interprète géométriquement, mais sans aller trop loin, le concept de matrice orthogonale. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ y sont perçus comme des *vecteurs*.

Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on appelle *produit scalaire de X et Y* le réel $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ et *norme de X* le réel positif $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Il n'est pas dur de vérifier que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

— $\langle Y, X \rangle = \langle X, Y \rangle$ (*symétrie*),

— $\langle X + X', Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X', Y \rangle$, $\quad \langle X, Y + Y' \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Y' \rangle \quad$ et $\quad \langle \lambda X, Y \rangle = \langle X, \lambda Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$ (*bilinéarité*),

— $\|X\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0$ (*séparation*).

On associe ensuite à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une application $\widehat{M}$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même en posant $\widehat{M}(X) = MX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. La bilinéarité du produit matriciel rend $\widehat{M}$ *linéaire*, ce qui veut dire que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\widehat{M}(X + Y) = \widehat{M}(X) + \widehat{M}(Y)$ $\quad$ et $\quad \widehat{M}(\lambda X) = \lambda \widehat{M}(X)$. $\quad$ On dit alors que $\widehat{M}$ est :

— une *isométrie vectorielle* si elle *préserve les normes*, i.e. si $\left\| \widehat{M}(X) \right\| = \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

— une *symétrie (vectorielle) orthogonale* si c'est une isométrie vectorielle et si $\widehat{M} \circ \widehat{M} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

5) Montrer que pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\widehat{M}$ est une isométrie vectorielle.

6) Tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ peut être représenté dans $\mathbb{C}$ par son affixe $x + \mathrm{i}y$.
Soit $M = R_1(\theta) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les affixe de X et $\widehat{M}(X)$ pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier ainsi qu'on appelle $\widehat{M}$ la *rotation (vectorielle) d'angle de mesure* θ.

7) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\widehat{M}$ est une isométrie vectorielle.

a) Vérifier l'identité remarquable : $\langle X, Y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\right)$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

b) En déduire que $\widehat{M}$ *préserve les produits scalaires*, i.e. que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\left\langle \widehat{M}(X), \widehat{M}(Y)\right\rangle = \langle X, Y\rangle$.

c) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $X^\top AY = 0$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, alors $A = 0$.

d) En déduire que M est orthogonale.

8) a) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\widehat{M}$ est une symétrie orthogonale si et seulement si M est orthogonale et $M^2 = I_n$.

b) En déduire que toute isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ est soit une rotation, soit une symétrie orthogonale.

Dans les questions qui suivent, on justifie géométriquement la définition des symétries orthogonales. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On suppose que $\widehat{M}$ est une symétrie orthogonale et on note $\mathscr{U}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\widehat{M}(X) = X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{V}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\widehat{M}(X) = -X$.

9) Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est la somme, d'une et une seule manière, d'un élément de $\mathscr{U}$ et d'un élément de $\mathscr{V}$.

10) a) Montrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\left\langle \widehat{M}(X), Y\right\rangle = \left\langle X, \widehat{M}(Y)\right\rangle$.

b) Montrer que les ensembles $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont *orthogonaux*, i.e. que pour tous $U \in \mathscr{U}$ et $V \in \mathscr{V}$: $\langle U, V\rangle = 0$.

En d'autres termes : $\mathscr{V} \subset \left\{Z \in \mathbb{R}^n \mid \forall U \in \mathscr{U}, \quad \langle Z, U\rangle = 0\right\}$. Pour montrer l'inclusion réciproque, on se donne un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ pour lequel $\langle Z, U\rangle = 0$ pour tout $U \in \mathscr{U}$.

c) Montrer que $\widehat{M}(Z) + Z$ est *orthogonal* à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, i.e. que $\left\langle \widehat{M}(Z) + Z, X\right\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, puis conclure.

Le résultat de la question **10)** énonce que $\mathscr{V}$ est exactement l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont *orthogonaux* à tout vecteur de $\mathscr{U}$. Si on connaît $\mathscr{U}$, on connaît donc virtuellement $\mathscr{V}$. On dit finalement que $\widehat{M}$ est la *symétrie orthogonale par rapport à* $\mathscr{U}$, mais cette appellation sera plus claire après la question qui suit.

11) Dans cette question finale : $n = 3$ et $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\widehat{M}$ est une symétrie orthogonale.

b) Déterminer $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ et les interpréter géométriquement.

c) Proposer une représentation graphique de la situation où figureront les ensembles $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$, un vecteur choisi arbitrairement X de $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs de sa décomposition **9)** et son image $\widehat{M}(X)$ par $\widehat{M}$.