Itérations

Pour tout ensemble E, pour toute fonction $f : E \longrightarrow E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée $f \circ \ldots \circ f$ (n fois) avec par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Les fonctions f^n, n décrivant $\mathbb{N}$, sont appelées les *itérées de f*.

Lorsque f est bijective, on peut également noter f^{-n} la composée $f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 La plus petite partie stable contenant...

1) Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application et A une partie de E. On pose $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(A)$.

a) Montrer que B contient A et est stable par f.

b) Soit C une partie de E contenant A et stable par f. Montrer que C contient B.

En résumé, B est la plus petite partie de E — au sens de l'inclusion — contenant A et stable par f.

2) On note f la fonction $z \longmapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer la plus petite partie de $\mathbb{C}$ contenant $\{3, i\}$ et stable par f.

3) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{4}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et on pose : $A = [2,4]$ et $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(A)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n pour lesquels : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $f^n(A) = [u_n, v_n]$.

b) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et leurs limites éventuelles.

c) En déduire B.

2 Le théorème de Cantor-Bernstein

On souhaite établir le résultat suivant.

Théorème **(Théorème de Cantor-Bernstein)** Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, il existe une bijection de E sur F.

4) Soient E un ensemble et A une partie de E. On suppose qu'il existe une injection f de E dans A. On souhaite montrer qu'il existe alors une bijection de E sur A.

On note X la plus petite partie de E contenant $E \setminus A$ et stable par f : $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(E \setminus A)$.

On note ensuite φ l'application de E dans E définie pour tout $x \in E$ par : $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \notin X. \end{cases}$

a) Montrer que φ est à valeurs dans A.

b) Montrer que φ est injective sur E.

c) Montrer que φ est surjective de E sur A.

5) En déduire une preuve du théorème de Cantor-Bernstein.

6) **a)** Montrer que l'application $(A,B) \longmapsto (2A) \cup (2B+1)$ est injective de $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

b) En déduire que les ensembles $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$ sont équipotents.

Les questions qui suivent sont toutes facultatives.

7) Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on appelle *indicatrice de A* et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathbb{1}_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$
On note par ailleurs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite ordonnée des nombres premiers : $p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5\ldots$

a) Montrer que l'application $A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est injective de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer que l'application $f \longmapsto \left\{p_n^{f(n)+1} \mid \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ est injective de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

c) Conclusion ?

3 Itérées d'une permutation sur un ensemble fini

Soient E un ensemble **fini** et σ une *permutation de E*, i.e. une bijection de E sur E.

8) On définit sur E une relation $\sim$ de la façon suivante — pour tous $x, y \in E$: $\quad x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad y = \sigma^k(x)$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

b) Soit $x \in E$. Pourquoi l'application $k \longmapsto \sigma^k(x)$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$?
En déduire que l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \quad \sigma^k(x) = x\right\}$ possède un plus petit élément $n(x)$.

c) Montrer que les éléments $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)$ sont deux à deux distincts pour tout $x \in E$.

d) Montrer que pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est l'ensemble $\left\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)\right\}$.

9) On note $X_1, \ldots, X_r$ les classes d'équivalence distinctes de E pour $\sim$ et $n_1, \ldots, n_r$ leurs cardinaux respectifs. Ensuite, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note σ_i l'application de E dans E définie par : $\quad \sigma_i|_{X_i} = \sigma|_{X_i} \quad$ et $\quad \sigma_i|_{E \setminus X_i} = \mathrm{Id}_{E\setminus X_i}$.

a) Montrer que $\sigma_i^{n_i} = \mathrm{Id}_E$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. En déduire que σ_i est une permutation de E.

b) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$ distincts : $\quad \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$.

c) Montrer que $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$.

d) Montrer que $\sigma^{n_1 \vee \ldots \vee n_r} = \mathrm{Id}_E$.