JACOBI ET LE PENDULE SIMPLE

Dans tout ce devoir, k désigne un réel quelconque de $[0,1[$.

1 FONCTION AMPLITUDE DE JACOBI

1) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On peut donc poser pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad$ et $\quad K = A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) a) Montrer que A est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\quad A(x) \geqslant x$. $\quad$ En déduire la limite de A en $+\infty$.

c) Étudier la parité/imparité de A.

d) Montrer que A est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle *amplitude de Jacobi (de module k)*, notée am, la réciproque de A. Ainsi : $\quad A\big(\mathrm{am}(x)\big) = \mathrm{am}\big(A(x)\big) = x \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) a) Montrer que : $\quad A(\pi) = 2K$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad A(x+\pi) = A(x) + 2K$. $\quad$ Qu'en déduit-on sur le graphe de A ?

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{am}(x+2K) = \mathrm{am}(x) + \pi$.

2 FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{sn}(x) = \sin \mathrm{am}(x), \quad \mathrm{cn}(x) = \cos \mathrm{am}(x) \quad$ et $\quad \mathrm{dn}(x) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)}$. $\quad$ Les deux premières fonctions ainsi définies sont appelées respectivement le *sinus de Jacobi* et le *cosinus de Jacobi (de module k)*. Je ne connais pas le nom de la troisième !

4) Que valent K, sn et cn pour $k = 0$?

5) a) Que valent sn et cn en 0, K et $2K$?

b) Étudier la parité/imparité des fonctions sn, cn et dn.

c) Étudier la périodicité des fonctions sn et cn et montrer que dn est $2K$-périodique

d) Simplifier $\mathrm{sn}(2K-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on sur le graphe de sn ?

6) a) Montrer que la fonction am est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\quad \mathrm{am}' = \mathrm{dn}$.

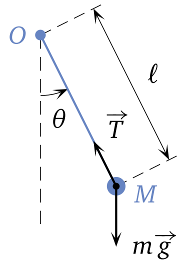
b) En déduire que les fonctions sn, cn et dn sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées en fonction de sn, cn et dn.

7) a) Dresser le tableau de variations de sn sur $[-2K, 2K]$.

b) En déduire le tableau de variations de cn sur $[-2K, 2K]$.

Dans la suite de ce devoir, consacrée aux oscillations d'un pendule, on remplacera les notations qui précèdent par les notations $A_k(x)$, $K(k)$, $\mathrm{am}_k(x)$, $\mathrm{sn}_k(x)$, $\mathrm{cn}_k(x)$ et $\mathrm{dn}_k(x)$ pour indiquer sans ambiguïté que ces différentes quantités dépendent de k.

3 Le pendule simple



On s'intéresse au mouvement plan d'un point matériel M situé à l'extrémité d'une tige sans masse qui peut tourner sans frottement autour d'un point O. Le point M a pour masse m, la tige a pour longueur ℓ et on note classiquement $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur : $g = \|\overrightarrow{g}\| \approx 9,81\,\mathrm{m\,s}^{-2}$. Parce que les frottements de l'air peuvent être négligés, le point M n'est soumis qu'à son poids $m\overrightarrow{g}$ et à la tension de la tige $\overrightarrow{T}$.

La mise en équation de cette expérience vous sera présentée en détail en cours de physique dans quelques mois. Après calcul, l'angle θ grâce auquel on repère le point M est entièrement caractérisé par l'équation différentielle : $\boxed{\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0}$ avec : $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

En cours de physique, vous simplifierez cette équation grâce à l'*approximation des petits angles*, qui n'étudie que les petites oscillations du pendule. Sous l'hypothèse que l'angle θ reste petit, vous pourrez approximer $\sin\theta$ par θ : $\sin\theta \approx \theta$ et ramener l'équation différentielle précédente à celle d'un simple *oscillateur harmonique* : $\theta'' + \omega^2\theta = 0$, dont les solutions sont faciles à exprimer à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

Que dire du pendule dans le cas général ? À cause du sinus qu'elle contient, l'équation différentielle : $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ est **non linéaire** et sa résolution exacte est nettement plus délicate. La suite de ce devoir vous en présente quelques solutions. Le réel strictement positif ω est fixé par les modalités de l'expérience.

8) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\theta_k(t) = 2\,\mathrm{Arcsin}\big(k\,\mathrm{sn}_k(\omega t)\big)$.

- **a)** Montrer que θ_k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\theta_k'' + \omega^2 \sin\theta_k = 0$.
- **b)** Montrer que θ_k est périodique et dresser — sans nouveau calcul — son tableau de variation sur une période.
- **c)** Vérifier que lorsque k décrit $[0,1[$, la vitesse initiale $\theta_k'(0)$ décrit l'intervalle $[0, 2\omega[$. Quelle est la trajectoire d'un pendule décrit par la fonction θ_k avec une vitesse initiale $\theta_k'(0)$ proche de 2ω ?

9) On s'intéresse dans cette question à la plus petite période d'un pendule décrit par la fonction θ_k avec une vitesse initiale $\theta_k'(0)$ proche de 2ω, ce qui revient à dire que k est proche de 1. Comme cette plus petite période vaut $\dfrac{4K(k)}{\omega}$, on souhaite calculer : $\lim\limits_{k\to 1} K(k)$.

- **a)** Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
- **b)** En déduire que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \geqslant \dfrac{\cos t}{1-a^2\sin^2 t}$ avec : $a = \sqrt{\dfrac{k^2+1}{2}}$.
- **c)** En déduire que : $\lim\limits_{k\to 1} K(k) = +\infty$. On pourra effectuer le changement de variable : $x = \sin t$ dans une certaine intégrale.
- **d)** Interpréter physiquement le résultat de la question **c)**.

10) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\theta_1(t) = 2\,\mathrm{Arcsin}\,\mathrm{th}(\omega t)$.

- **a)** Montrer que : $\theta_1'' + \omega^2 \sin\theta_1 = 0$.
- **b)** Que vaut $\theta_1'(0)$? Quelle est la trajectoire d'un pendule décrit par la fonction θ_1 ?