L'algorithme CORDIC

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Irrationnalité de e

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+\mathrm{e}x$.

b) En déduire par intégration que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}x^{n+1}}{(n+1)!}$.

c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ après avoir justifié l'existence de cette limite.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad r_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{n!}{(n+k)!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^k}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant n!r_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. On pourra remarquer que : $\quad r_n = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k!}$.

c) Que vaut : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$? En étudiant : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \sin(2\pi n! r_n)$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \sin(2\pi n! \mathrm{e}) = 2\pi$.

d) En déduire que e est irrationnel.

2 L'algorithme CORDIC

L'*algorithme CORDIC* (*COordinate Rotation DIgital Computer*) présenté dans ce devoir a été inventé en 1959 par un certain Jack E. Volder pour le calcul approché des fonctions trigonométriques. C'est grâce à lui que les premières calculatrices de poche calculaient les sinus et les cosinus dans les années 70. À vrai dire, l'idée mathématique qui sous-tend l'algorithme CORDIC est très simple et était déjà connue au 17ème siècle, mais le développement des ordinateurs lui a donné une nouvelle jeunesse.

Il est toujours possible de calculer un sinus ou un cosinus à partir de l'une des formules suivantes, valables pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Concrètement, cela dit, on ne peut utiliser ces formules qu'en les tronquant à un certain ordre n choisi en fonction de la finesse de l'approximation souhaitée grâce aux encadrements suivants :

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \text{et} \qquad \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De telles formules étaient hélas difficiles à exploiter à la naissance des ordinateurs. Pourquoi ? Parce qu'elles nécessitent de nombreuses multiplications et il était coûteux à l'époque d'embarquer un multiplicateur dans les premières calculatrices de poche. Il fallait se contenter d'opérations simples :

- déplacer la virgule en base 2, i.e. multiplier ou diviser par 2,
- additionner et soustraire,
- tester qu'un nombre est supérieur à un autre,
- utiliser quelques nombres stockés par avance en mémoire.

L'algorithme CORDIC est né en réponse à ces contraintes économiques et techniques.

Dans ce devoir, on dira qu'une suite réelle $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *gentille* si elle est décroissante de limite nulle et si : $\dfrac{\theta_n}{2} \leqslant \theta_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est gentille.

2) Soient $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite gentille et $\alpha \in [-2\theta_0, 2\theta_0]$ fixé. On définit par récurrence deux suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $s_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si : } s_n \leqslant \alpha \\ -1 & \text{si : } s_n > \alpha \end{cases}$ et $s_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \theta_k$.

On suppose dans les questions **a)** et **b)** que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\theta_n = \dfrac{1}{2^n}$.

a) Calculer la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où : $\alpha = 2$. Vérifier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

b) Dans le cas où : $\alpha = \dfrac{2}{3}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = (-1)^n$. Vérifier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

On reprend le cas général d'une suite gentille $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\alpha - s_{n+1}| \leqslant \theta_n$, puis que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

On pose désormais une fois pour toutes : $\theta_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\operatorname{Arctan} x \leqslant 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{2}$.

b) En déduire que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est gentille.

On fixe désormais une fois pour toutes un réel $\alpha \in [-2\theta_0, 2\theta_0] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et un entier $N \in \mathbb{N}$. On reprend les notations de la question **2)** et on définit par récurrence deux familles $(x_0, \ldots, x_N)$ et $(y_0, \ldots, y_N)$ en posant : $x_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{N} \cos\theta_k$ et $y_0 = 0$ et pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n \dfrac{y_n}{2^n}$ et $y_{n+1} = y_n + \varepsilon_n \dfrac{x_n}{2^n}$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in [\![0, N+1]\!]$: $x_n + \mathrm{i} y_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i} s_n} \displaystyle\prod_{k=n}^{N} \cos\theta_k$ — avec par convention : $\displaystyle\prod_{k=N+1}^{N} \cos\theta_k = 1$.

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right| \leqslant |x - y|$.

c) En déduire que : $\left|\cos\alpha - x_{N+1}\right| \leqslant \theta_N$ et $\left|\sin\alpha - y_{N+1}\right| \leqslant \theta_N$.

Comment les premières calculatrices calculaient-elles finalement des valeurs approchées du sinus et du cosinus d'un réel α grâce à l'algorithme CORDIC ? Une précision de calcul était fixée une fois pour toutes, par exemple 10^{-12}. Il se trouve que : $\theta_{40} = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2^{40}} < 10^{-12}$. On choisit ainsi de travailler avec l'entier : $N = 40$. La mémoire de la calculatrice contient une fois pour toutes les nombres $\theta_0, \ldots, \theta_N$ et le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{N} \cos\theta_k$. Les réels $s_0, \ldots, s_{N+1}$ et $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{N+1}$ sont alors calculés de proche en proche à partir d'additions/soustractions et de comparaisons entre deux nombres. Les réels $x_0, \ldots, x_{N+1}$ et $y_0, \ldots, y_{N+1}$ sont calculés en parallèle. Leur calcul ne fait intervenir que des additions/soustractions et des divisions par 2, i.e. des déplacements de virgule en base 2. On peut ainsi en un nombre fixé d'étapes calculer une valeur approchée à 10^{-12} près de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ pour tout $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De là, les propriétés de symétrie des fonctions sinus et cosinus permettent bien sûr d'atteindre $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.