

L'ANNEAU DES MATRICES CENTRO-SYMÉTRIQUES

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 UNE FAMILLE LIBRE DE FONCTIONS

On souhaite montrer que la famille des fonctions $x \mapsto \ln(x+k)$ définies sur \mathbb{R}_+^* , k décrivant \mathbb{N} , est libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. On se donne pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $x > 0$:
$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \ln(x+k) = 0.$$

- 1) Montrer par une étude asymptotique aux bornes que $\lambda_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$.
- 2) a) Déterminer une expression explicite de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \ln x$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
 b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k^p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.

2 L'ANNEAU DES MATRICES CENTRO-SYMÉTRIQUES

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la matrice $(\delta_{i,n+1-j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où l'on a posé $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$ pour tous $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 1) Montrer que U_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer son inverse.

On fixe à présent $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose $n = 2p$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *centro-symétrique* si pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $m_{n+1-i, n+1-j} = m_{i,j}$, autrement dit si elle est « symétrique par rapport à son centre ».

On note \mathcal{C} l'ensemble des matrices centro-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 2) a) Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 b) Montrer que \mathcal{C} est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à U_n .
 c) En déduire que \mathcal{C} est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 d) Montrer que $U(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note \mathcal{A} l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U_p A U_p \end{pmatrix}$, A décrivant $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et \mathcal{B} l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & U_p B U_p \\ B & 0 \end{pmatrix}$, B décrivant $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- 3) Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de \mathcal{C} . Qu'en est-il de \mathcal{B} ?
- 4) a) Montrer que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont supplémentaires dans \mathcal{C} .
 b) En déduire la dimension de \mathcal{C} .

- 5) Cette dernière question est facultative. On note Q la matrice $\begin{pmatrix} I_p & -U_p \\ U_p & I_p \end{pmatrix}$.
 a) Montrer que Q est inversible et expliciter son inverse, qu'on écrira par blocs.
 b) Simplifier et écrire par blocs, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice $Q^{-1} \begin{pmatrix} A & U_p B U_p \\ B & U_p A U_p \end{pmatrix} Q$.
 c) Montrer que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si M et N le sont.
 d) À quelle condition nécessaire et suffisante sur $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} A & U_p B U_p \\ B & U_p A U_p \end{pmatrix}$ appartient-elle à $U(\mathcal{C})$?