L'anneau des matrices centro-symétriques

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une famille libre de fonctions

On souhaite montrer que la famille des fonctions $x \longmapsto \ln(x+k)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$, k décrivant $\mathbb{N}$, est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. On se donne pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $x > 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ln(x+k) = 0$.

1) Montrer par une étude asymptotique aux bornes les égalités : $\lambda_0 = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$.

2) a) Déterminer une expression explicite de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto \ln x$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^p} = 0$.

3) Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.

2 L'anneau des matrices centro-symétriques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la matrice $\left(\delta_{i,n+1-j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où l'on a posé pour tous $a, b \in [\![1,n]\!]$: $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si : } a = b \\ 0 & \text{si : } a \neq b. \end{cases}$

1) Montrer que U_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer son inverse.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose n pair : $n = 2p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *centro-symétrique* si elle est « symétrique par rapport à son centre », c'est-à-dire formellement si pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$: $m_{n+1-i,n+1-j} = m_{i,j}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices centro-symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à U_n.

c) En déduire que $\mathscr{C}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que : $\mathrm{U}(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) Calculer la dimension de $\mathscr{C}$.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U_pAU_p \end{pmatrix}$, A décrivant $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, et $\mathscr{B}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & U_pBU_p \\ B & 0 \end{pmatrix}$, B décrivant $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

4) a) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. On **admet** qu'il en va de même de $\mathscr{B}$.

b) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{C}$. Qu'en est-il de $\mathscr{B}$?

5) Montrer que : $\mathscr{C} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$. Retrouver ainsi le résultat de la question **3)**.

6) On note Q la matrice $\begin{pmatrix} I_p & -U_p \\ U_p & I_p \end{pmatrix}$.

a) Montrer que Q est inversible et expliciter son inverse, qu'on écrira par blocs.

b) Simplifier pour tous $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et écrire par blocs la matrice : $Q^{-1} \begin{pmatrix} A & U_pBU_p \\ B & U_pAU_p \end{pmatrix} Q$.

c) Montrer que pour tous $M, N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si M et N le sont.

d) À quelle condition nécessaire et suffisante sur $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} A & U_pBU_p \\ B & U_pAU_p \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathrm{U}(\mathscr{C})$?