L'anneau des matrices circulantes

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une famille libre de fonctions

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$.

b) Déterminer le degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(\mathrm{i}) \neq 0$.

2) Montrer que la famille des dérivées $\left(f^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2 L'anneau des matrices circulantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle *matrice circulante* (*de taille* n) toute matrice de la forme :

$$C(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

On notera $\mathscr{C}$ l'ensemble de ces matrices et U la matrice : $U = C(0,\ldots,0,1)$.

1) a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension.

b) Compléter pour tous $x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}$: $C(x_0,\ldots,x_{n-1})\,U = C(\,?\,,\ldots,\,?\,)$ et ${}^tC(x_0,\ldots,x_{n-1}) = C(\,?\,,\ldots,\,?\,)$.

2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $U^k \in \mathscr{C}$.

b) En déduire l'égalité : $\mathscr{C} = \mathbb{C}[U]$ où $\mathbb{C}[U]$ est l'ensemble des *polynômes en* U, i.e. des matrices de la forme $P(U)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$.

c) En déduire que $\mathscr{C}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3) On définit une application $\sigma : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant pour tous $x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}$: $\sigma\big(C(x_0,\ldots,x_{n-1})\big) = x_0+\ldots+x_{n-1}$.
On pose en outre : $\mathscr{K} = \left\{M \in \mathscr{C} /\ \ \sigma(M) = 0\right\}$.

a) Montrer que σ est *linéaire*, i.e. que pour tous $M,N \in \mathscr{C}$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$: $\sigma(\lambda M+\mu N) = \lambda\sigma(M)+\mu\sigma(N)$.

b) Montrer que $\mathscr{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. Est-ce un sous-anneau de $\mathscr{C}$?

c) Montrer que : $\mathscr{C} = \mathscr{K} \oplus \mathrm{Vect}(U)$. Que vaut la dimension de $\mathscr{K}$?

4) On pose : $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$: $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que : $\Omega\overline{\Omega} = \overline{\Omega}\Omega = nI_n$, où $\overline{\Omega}$ désigne la matrice obtenue à partir de Ω par simple conjugaison des coefficients.

b) Montrer que pour tous $M \in \mathscr{C}$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$: $MX_k = \sigma_k(M)\,X_k$ pour un certain $\sigma_k(M) \in \mathbb{C}$ à préciser.

c) En déduire pour tout $M \in \mathscr{C}$ que la matrice $\Omega^{-1}M\Omega$ est diagonale.

d) Montrer que pour toute $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale : $\Omega D\Omega^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1,k+1}\, X_k{}^t\overline{X_k}$, puis que : $\Omega D\Omega^{-1} \in \mathscr{C}$.

e) En déduire une caractérisation du groupe $\mathrm{U}(\mathscr{C})$ des inversibles de l'anneau $\mathscr{C}$.

5) Cette dernière question est facultative. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{C}$.

a) Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ et calculer sa dimension.

b) L'ensemble $\mathscr{S}$ est-il un sous-anneau de $\mathscr{C}$?