L'ensemble de Mandelbrot

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une inégalité de modules

On souhaite établir l'inégalité suivante : $\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \quad -1 \leqslant 3|z-1| - \left|z^2 - z + 1\right| \leqslant \frac{13}{4}.}$

Soit $z \in \mathbb{U}$ un nombre complexe de module 1. On pose : $x = |z-1|$.

1) Montrer que : $\left|z^2 - z + 1\right| = \left|x^2 - 1\right|$.

2) En déduire l'inégalité demandée.

3) Pour quelles valeurs de z les valeurs -1 et $\frac{13}{4}$ sont-elles effectivement atteintes ?

2 L'ensemble de Mandelbrot

Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* si : $\exists\, M \geqslant 0/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$. En particulier, si : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas** bornée.

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on notera $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $z_0(c) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1}(c) = z_n(c)^2 + c$. L'ensemble $\mathscr{M}$ des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels la suite $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée porte un nom depuis les années 80, on l'appelle l'*ensemble de Mandelbrot*. Si vous avez déjà entendu parler des *fractales*, sachez que l'ensemble de Mandelbrot en est une, mais nous n'avons pas les moyens de l'étudier en tant que fractale. Nous nous contenterons dans ce devoir de démontrer quelques propriétés géométriques simples de l'ensemble $\mathscr{M}$ qui nous aideront à nous le représenter.

N'hésitez pas à vous servir de l'inégalité triangulaire, selon laquelle pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z| - |z'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tous $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$: $z_n\big(\overline{c}\big) = \overline{z_n(c)}$.

b) En déduire un axe de symétrie de $\mathscr{M}$.

Dans chaque question désormais, le nombre complexe c étant fixé, on notera simplement $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut tout de même bien garder en tête que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de c.

2) Montrer que $\mathscr{M}$ contient le nombre i.

3) Soit $c \in \mathbb{C}$ pour lequel : $|c| \leqslant \frac{1}{4}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \leqslant \frac{1}{2}$. Qu'en déduit-on sur $\mathscr{M}$?

4) Soit $c \in \mathbb{C}$ pour lequel : $|c| > 2$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|z_n| \geqslant |c|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z_{n+1}| \geqslant 2\big(|z_n| - 1\big)$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|z_n| \geqslant 2^{n-1}\big(|c| - 2\big) + 2$.

d) En déduire que : $c \notin \mathscr{M}$, puis que $\mathscr{M}$ est inclus dans un disque dont on précisera le centre et le rayon.

5) a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geqslant x - \frac{1}{4}$.

c) Soit $c \in \left]\frac{1}{4}, 2\right]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n \geqslant n\left(c - \frac{1}{4}\right)$.

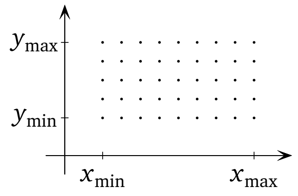
d) Soit $c \in [-2, 0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \leqslant |c|$.

e) En déduire $\mathscr{M} \cap \mathbb{R}$.

6) Soit $c \in \mathscr{M}$. Par définition de $\mathscr{M}$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais on ne sait pas par quoi. On va montrer dans cette question qu'on peut toujours la borner par le réel 2.

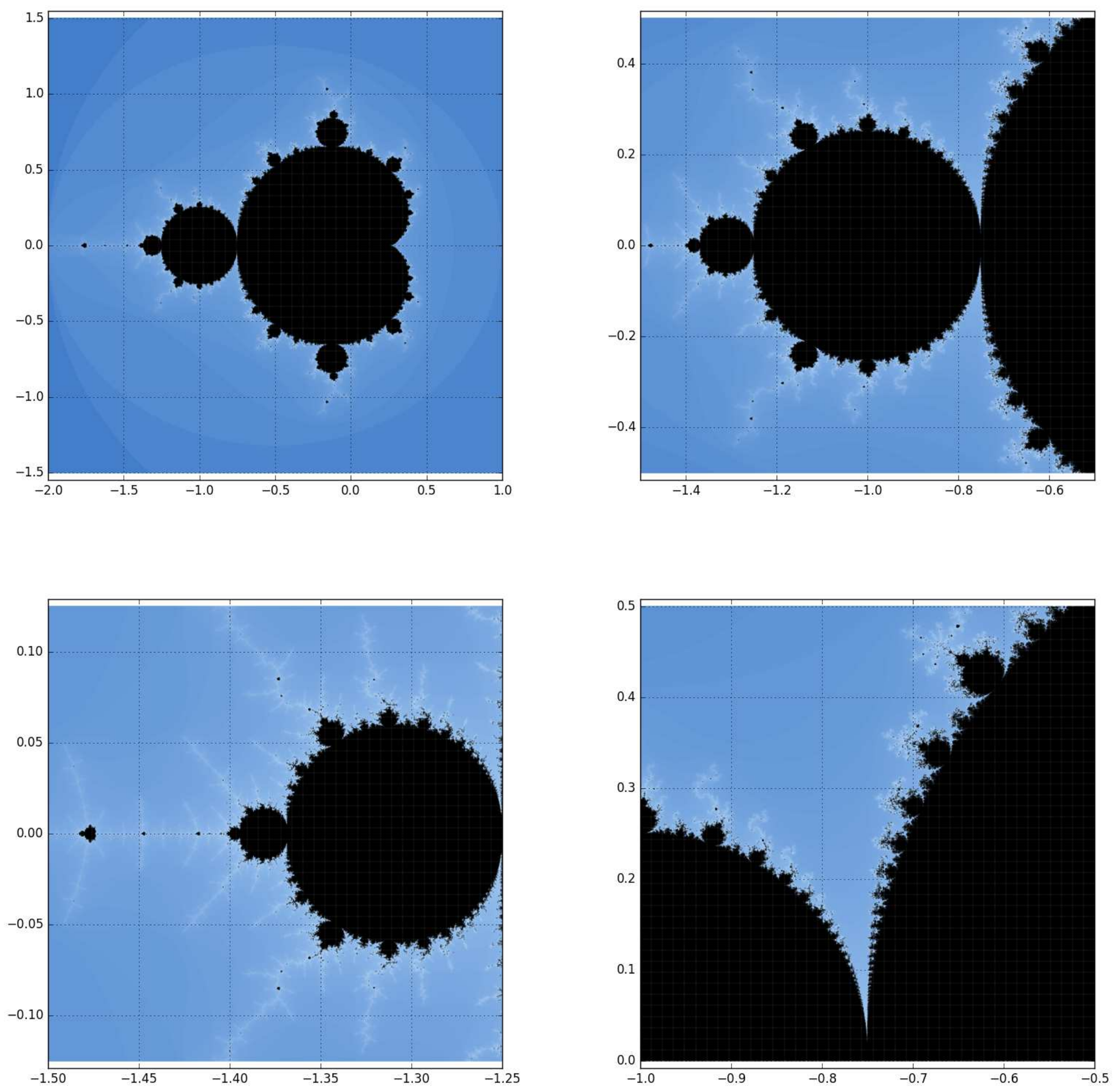
- **a)** Montrer que l'équation : $\quad x^2 = x + |c| \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution γ.
- **b)** Montrer l'inégalité : $\quad 1 \leqslant \gamma \leqslant 2$.
- **c)** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \delta_n = |z_n| - \gamma$. $\quad$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \delta_{n+1} \geqslant 2\gamma\delta_n$.
- **d)** En déduire, en raisonnant par l'absurde, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |z_n| \leqslant \gamma$.

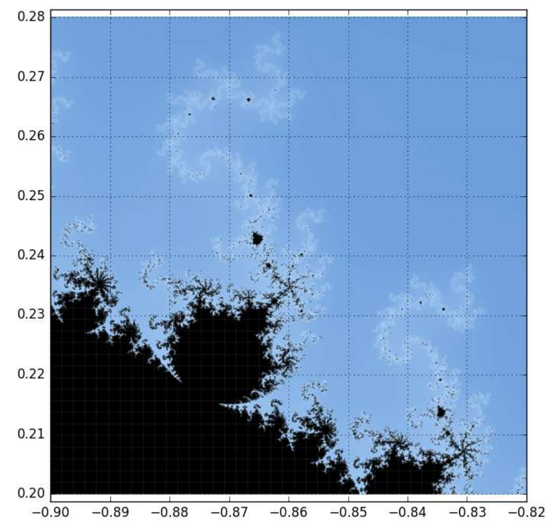
Le résultat de la question **6)** est très utile quand on veut représenter l'ensemble $\mathscr{M}$ par ordinateur. Pour le représenter sur un rectangle $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$, on veut savoir quels points de ce rectangle sont dans $\mathscr{M}$ et quels points n'y sont pas. Et comme on ne peut pas tester une infinité de points avec un ordinateur, on ramène en fait le rectangle à une simple grille de points comme sur la figure ci-contre.

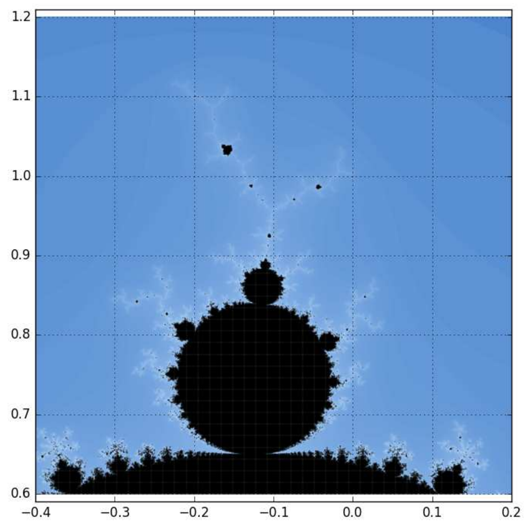


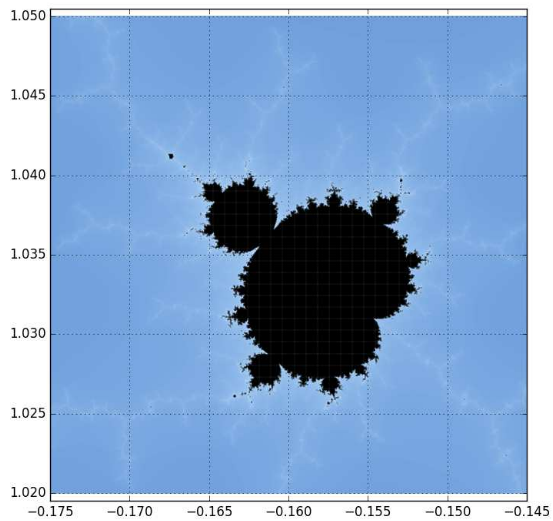
Pour chacun de ces points c, on calcule alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante pour savoir si elle est bornée. Le problème, c'est qu'ici aussi, le calcul d'un nombre infini de termes n'est pas possible. Concrètement, on calcule donc un nombre fixé de termes, par exemple 100. Si l'un des nombres $z_1, \ldots, z_{100}$ dépasse 2 en module, la question **6)** montre que : $\quad c \notin \mathscr{M}$. $\quad$ Si au contraire chacun de ces nombres a un module inférieur à 2, on considère que : $\quad c \in \mathscr{M} \quad$ — peut-être à tort, mais ça marche bien.

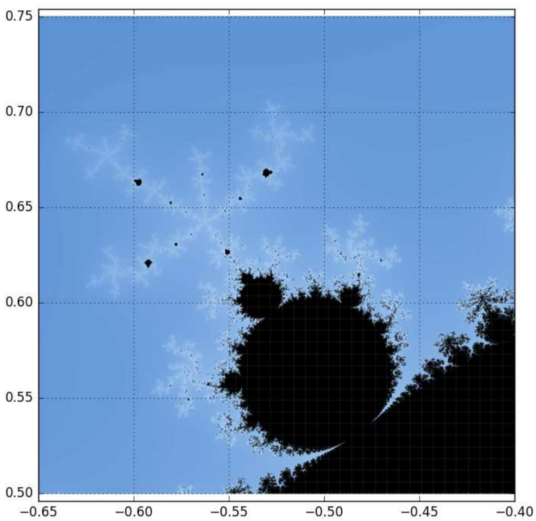
L'ensemble de Mandelbrot $\mathscr{M}$ est représenté en noir sur les figures ci-dessous. Les dégradés de bleu qui l'entourent représentent autre chose. Pour une valeur de c qui n'appartient pas à $\mathscr{M}$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépasse 2 en module à partir d'un certain rang. Ce rang peut être petit comme il peut être grand. Par convention, plus il est petit, plus la couleur du point c est foncée.

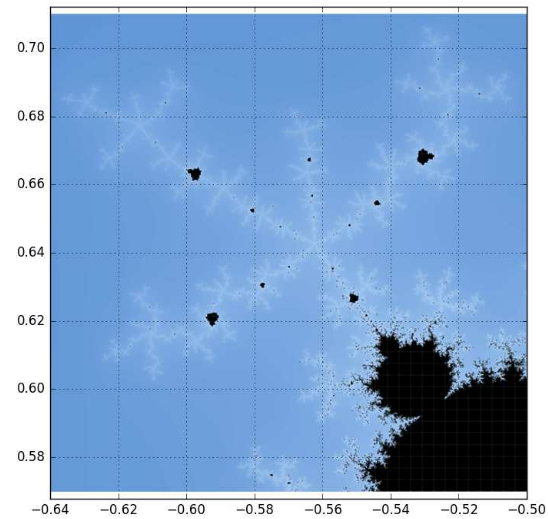


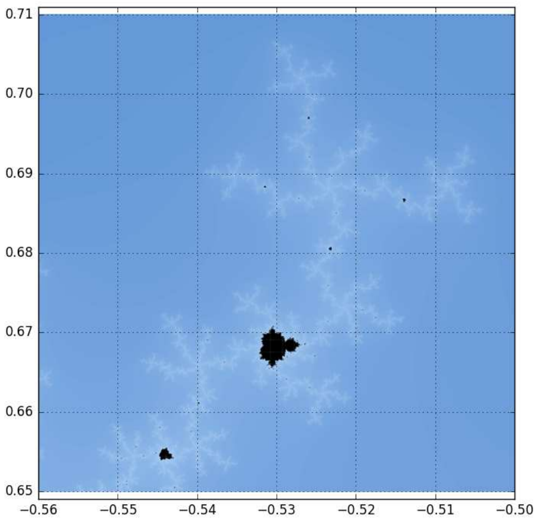

0.28
0.27
0.26
0.25
0.24
0.23
0.22
0.21
0.20
−0.90 −0.89 −0.88 −0.87 −0.86 −0.85 −0.84 −0.83 −0.82


1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
−0.4 −0.3 −0.2 −0.1 0.0 0.1 0.2


1.050
1.045
1.040
1.035
1.030
1.025
1.020
−0.175 −0.170 −0.165 −0.160 −0.155 −0.150 −0.145


0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
−0.65 −0.60 −0.55 −0.50 −0.45 −0.40


0.70
0.68
0.66
0.64
0.62
0.60
0.58
−0.64 −0.62 −0.60 −0.58 −0.56 −0.54 −0.52 −0.50


0.71
0.70
0.69
0.68
0.67
0.66
0.65
−0.56 −0.55 −0.54 −0.53 −0.52 −0.51 −0.50