L'ensemble de Mandelbrot

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Pataugeoire récurrente d'ordre 2

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note par ailleurs α la plus grande solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et β la plus petite.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. Montrer que si x_0 et x_1 sont des entiers relatifs, x_n en est un aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de $\mathscr{E}$ pour laquelle $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et on pose $v_n = \alpha^n + \beta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$.

c) Montrer que u_n et v_n sont des entiers naturels pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple (u_n, v_n) est solution de l'équation diophantienne $y^2 = 5x^2 + 4$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

3) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right[$: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k x^k = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 1}$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + 1$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_k u_{k+1}}$.

2 L'ensemble de Mandelbrot

Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* si : $\quad \exists\, M \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$ Ainsi, en particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **N'est PAS** bornée.

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on notera désormais $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0(c) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad z_{n+1}(c) = z_n(c)^2 + c$. Depuis les années 80, l'ensemble $\mathscr{M}$ des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels la suite $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est appelé l'*ensemble de Mandelbrot*. Si vous avez déjà entendu parler des *fractales*, sachez que l'ensemble de Mandelbrot en est une, mais nous n'avons pas les moyens de l'étudier en tant que tel. Nous nous contenterons de résultats modestes.

En termes techniques, ce devoir se donne pour but de vous faire travailler le principe de récurrence et l'inégalité triangulaire.

1) Montrer que $\mathscr{M}$ contient les nombres 0 et i.

2) a) Montrer que $z_n\big(\overline{c}\big) = \overline{z_n(c)}$ pour tous $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire un axe de symétrie de $\mathscr{M}$.

Dans chacune des questions qui suivent, le nombre complexe c est fixé et on notera simplement $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\big(z_n(c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par souci de légèreté. Gardez tout de même bien en tête que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de c.

3) Soit $c \in \mathbb{C}$ un nombre complexe pour lequel $|c| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Montrer que $|z_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Qu'en déduit-on sur $\mathscr{M}$?

4) Soit $c \in \mathbb{C}$ un nombre complexe pour lequel $|c| > 2$.

a) Montrer que $|z_n| \geqslant |c|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $|z_{n+1}| \geqslant \big(|c| - 1\big)\,|z_n|$.

b) En déduire que $\mathscr{M}$ est inclus dans un disque dont on précisera le centre et le rayon.

5) a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $z_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $x^2 \geqslant x - \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Soit $c \in \left]\dfrac{1}{4}, 2\right]$. Montrer que $z_n \geqslant n\left(c - \dfrac{1}{4}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Soit $c \in [-2, 0]$. Montrer que $|z_n| \leqslant |c|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) En déduire $\mathscr{M} \cap \mathbb{R}$.

6) Soit $c \in \mathscr{M}$. Par définition de $\mathscr{M}$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais on ne sait pas par quoi. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |z_n| \leqslant 2$.

a) Montrer que l'équation $x^2 = x + |c|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution γ, puis que $\gamma \in [1, 2]$.

On pose $\delta_n = |z_n| - \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

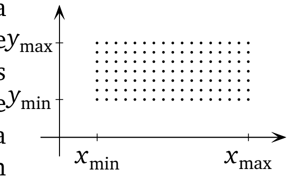
b) Montrer que $\delta_{n+1} \geqslant 2\gamma\delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

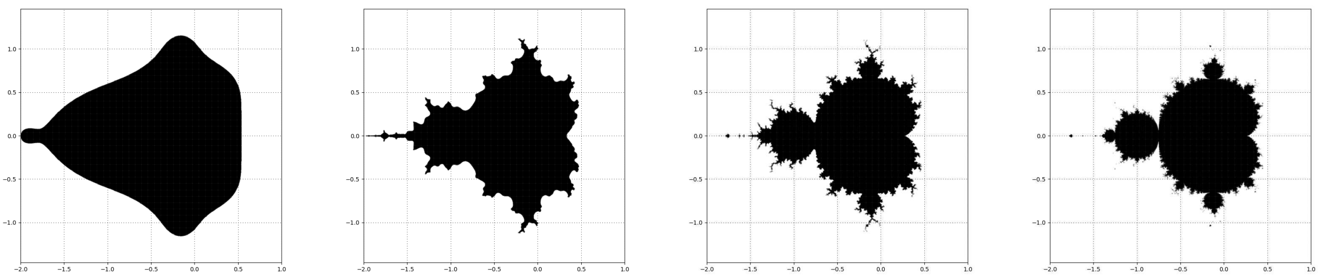
c) En déduire que $\delta_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis conclure.

Comment savoir en pratique si un nombre complexe appartient à $\mathscr{M}$? Pour une valeur de $c \in \mathbb{C}$ donnée, on calcule les termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de proche en proche, et si l'un d'eux a un module strictement supérieur à 2, alors d'après **6)**, c **N**'appartient **PAS** à $\mathscr{M}$. Le résultat de la question **6)** nous offre donc un test de **NON**-appartenance à $\mathscr{M}$. Hélas, ce test ne permet pas de montrer qu'un point appartient à $\mathscr{M}$, i.e. que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car on ne peut calculer concrètement qu'un nombre fini de termes de cette suite.

À défaut de savoir représenter $\mathscr{M}$ avec exactitude, on peut au moins tirer du test précédent des tracés approximatifs de $\mathscr{M}$. Fixons pour cela un entier N assez grand, par exemple $N = 100$. Pour étudier l'appartenance d'un nombre complexe c à $\mathscr{M}$, on calcule de proche en proche $|z_1|, \ldots, |z_N|$. Si l'un d'eux dépasse 2 strictement, alors c n'appartient pas à $\mathscr{M}$. Si au contraire ces nombres sont tous inférieurs ou égaux à 2, c a de fortes chances d'appartenir à $\mathscr{M}$, mais seulement de fortes chances car rien n'empêche $|z_{1000}|$ de dépasser 2. Plus on choisit N grand au départ, plus le test d'appartenance à $\mathscr{M}$ est fiable.

L'ensemble $\mathscr{M}$ porte le nom du mathématicien Benoît Mandelbrot (1924-2010) qui, le premier, en a obtenu des représentations graphiques satisfaisantes par ordinateur en 1980. Pour en obtenir à notre tour, on commence par choisir une zone de travail recangulaire $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$. Certains points de cette zone appartiennent à $\mathscr{M}$, d'autres non. Cela dit, on ne peut pas tester une infinité de points avec un ordinateur, on ramène donc en fait le rectangle à une grille de points comme sur la figure ci-contre. En appliquant à chacun d'entre eux le test qui précède, on obtient une représentation approximative de $\mathscr{M}$, d'autant plus fiable que N est grand. Les figures qui suivent ont été obtenues pour $N = 5$, $N = 10$, $N = 20$ et $N = 50$.





La fin de ce devoir est facultative et plus délicate. Les questions **8)** et **9)** exigent une certaine familiarité avec la trigonométrie et la forme trigonométrique des nombres complexes — que nous (ré)étudierons bientôt ensemble.

7) Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe pour lequel $|a| \leqslant \sqrt{2} - 1$. On s'intéresse au nombre complexe $c = a - a^2$ et on pose pour cela $u_n = |z_n - a|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $u_{n+1} \leqslant u_n \left(u_n + 2|a|\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $u_n \leqslant |a|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $\mathscr{M}$ contient c.

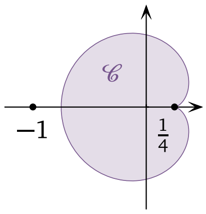
En résumé, $\mathscr{M}$ contient l'ensemble $\left\{a - a^2 \;\middle|\; |a| \leqslant \sqrt{2} - 1\right\}$. Il contient même l'ensemble plus gros $\mathscr{C} = \left\{a - a^2 \;\middle|\; |a| \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$, mais nous n'avons pas les moyens de le prouver et nous l'**ADMETTRONS**.

8) a) Montrer que tout nombre complexe z peut être écrit $z = r\,e^{\frac{i\theta}{2}}$ pour certains $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) En déduire que tout nombre complexe a peut être écrit $a = \dfrac{1}{2} + ir\,e^{\frac{i\theta}{2}}$ pour certains $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

9) a) Montrer que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe réel.

b) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$: $\quad \left|\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r \in \left[0, \sin\dfrac{\theta}{2}\right]$.



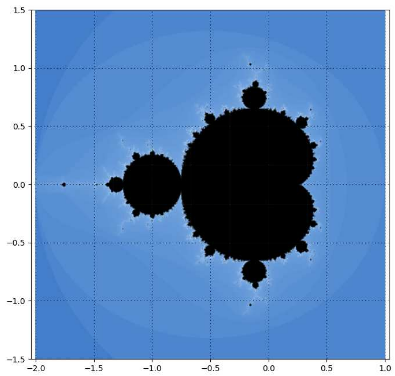
c) En déduire que $\mathscr{C} = \left\{\dfrac{1}{4} + r^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad r \in \left[0, \sin\dfrac{\theta}{2}\right]\right\}$.

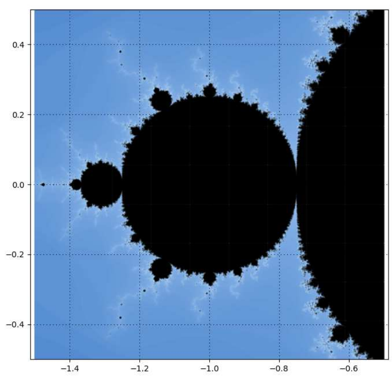
d) Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \sin^2\dfrac{x}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

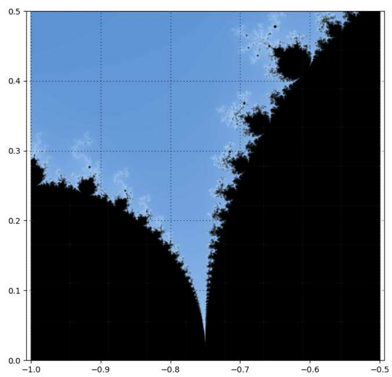
e) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ fixé. Quand r décrit $\left[0, \sin\dfrac{\theta}{2}\right]$, quel segment le nombre $r^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ décrit-il ? De quelle longueur ?

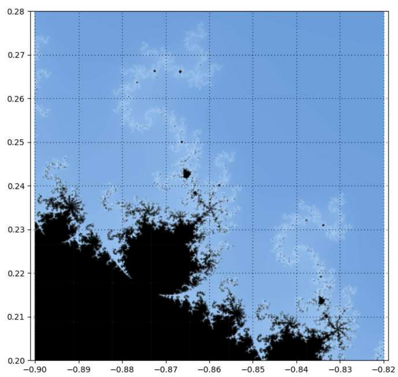
f) En déduire que $\mathscr{C}$ a bien la forme proposée ci-contre.

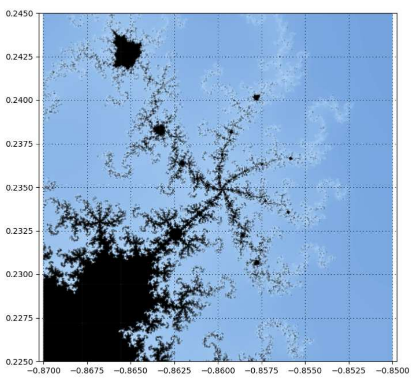
Nous avons ainsi déniché le morceau le plus visible de l'ensemble $\mathscr{M}$. La frontière de $\mathscr{C}$, qui a la forme d'un cœur, est un type de courbe qu'on appelle une *cardioïde*. Quant aux figures qui suivent, elles vous offrent un petit voyage bien mérité dans l'ensemble de Mandelbrot, représenté en noir. Les dégradés de bleu qui l'entourent indiquent la valeur du plus petit entier N pour lequel $|z_N| > 2$. Plus N est grand, plus la teinte bleutée du point c est claire.

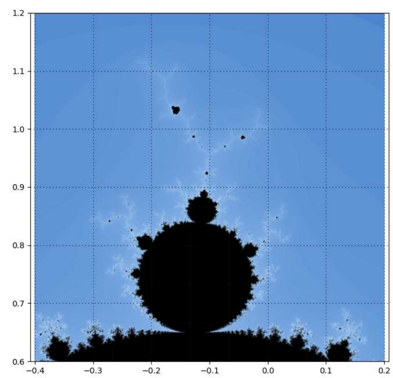


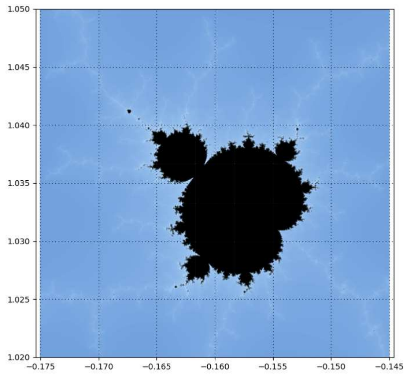


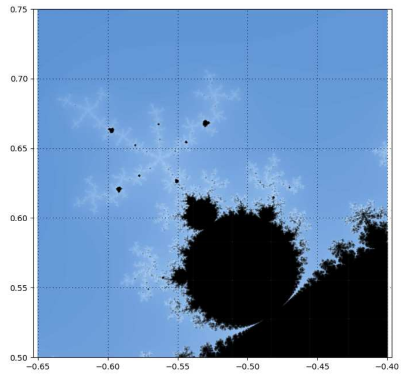


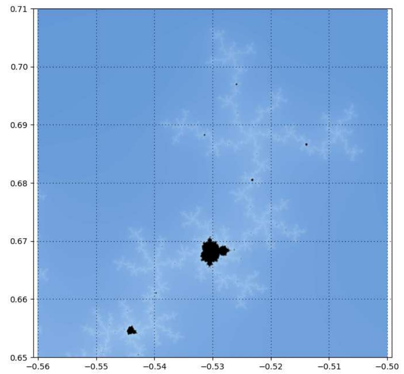


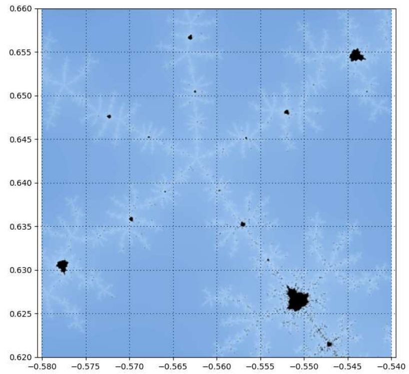





1.050
1.045
1.040
1.035
1.030
1.025
1.020
−0.175
−0.170
−0.165
−0.160
−0.155
−0.150
−0.145


0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
−0.65
−0.60
−0.55
−0.50
−0.45
−0.40


0.71
0.70
0.69
0.68
0.67
0.66
0.65
−0.56
−0.55
−0.54
−0.53
−0.52
−0.51
−0.50


0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
0.620
−0.580
−0.575
−0.570
−0.565
−0.560
−0.555
−0.550
−0.545
−0.540