L'ÉPAISSEUR D'UN CHEVEU

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 L'ÉPAISSEUR D'UN CHEVEU

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ qui ne sont pas constantes de valeur 1 à partir d'un certain rang.

1) Soit $f \in \mathscr{F}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{2^{k+1}}$. Montrer que la suite $\big(\sigma_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite $\sigma(f)$ appartient à $[0,1[$.

2) Soit $x \in [0,1[$. On pose $a_0(x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1}(x) = \begin{cases} a_n(x) & \text{si } x < a_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ a_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{sinon,} \end{cases}$
puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_x(n) = 2^{n+1}\big(a_{n+1}(x) - a_n(x)\big)$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de la fonction φ_x ? Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_x(k)}{2^{k+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x - \frac{1}{2^n} < a_n(x) \leqslant x$, puis que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Pour montrer que φ_x appartient à $\mathscr{F}$, on suppose par l'absurde que φ_x est constante de valeur 1 à partir d'un certain rang p. Dénicher une contradiction en étudiant $a_{n+1}(x) - a_p(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que $\sigma \circ \varphi = \mathrm{Id}_{[0,1[}$.

On **ADMET** que $\varphi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ pour gagner du temps. En d'autres termes, les ensembles $\mathscr{F}$ et $[0,1[$ sont équipotents.

4) a) On pose pour tout $x \in [0,1[$: $d(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$

Tracer l'allure du graphe de d sur $[0,1[$ et se convaincre sans preuve que d est une bijection de $[0,1[$ sur $]0,1[$.

b) Montrer que les ensembles $\mathbb{R}$, $]0,1[$ et $\mathscr{F}$ sont équipotents.

5) Soient E un ensemble et A une partie de E. On suppose qu'il existe une injection f de E dans A. On souhaite en déduire que A et E sont équipotents, i.e. qu'il existe une bijection de E sur A.
On pose $\overline{A} = E \setminus A$, puis $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n\big(\overline{A}\big)$, et on pose pour tout $x \in E$: $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Montrer que g est à valeurs dans A et que X est stable par g.

b) Montrer que g est injective sur E.

c) Montrer que g est surjective de E sur A.

Il n'est pas difficile de tirer du résultat de cette question **5)** l'important *théorème de Cantor-Bernstein* évoqué en cours, mais nous n'en avons pas besoin ici.

6) a) On associe à toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction $\widehat{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\widehat{f}(2n) = f(n)$ et $\widehat{f}(2n+1) = 0$. Montrer que l'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{F}$.

b) En déduire que les ensembles $\mathbb{R}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

7) a) On associe à tout couple (f,g) de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ une fonction $\pi_{f,g}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\pi_{f,g}(2n) = f(n)$ et $\pi_{f,g}(2n+1) = g(n)$. Montrer que l'application $(f,g) \overset{\pi}{\longmapsto} \pi_{f,g}$ est injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer enfin que les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont équipotents.

Conclusion : il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$, et comme $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents, il y a même autant d'éléments dans $]0,1[$ que dans $\mathbb{C}$. Il ne serait d'ailleurs pas plus difficile de montrer qu'il y a autant d'éléments dans $]0,1[$ que dans notre espace géométrique usuel $\mathbb{R}^3$. Le monde n'est pas plus épais qu'un cheveu !

2 Théorie des ensembles finis

Cette partie est facultative. On se propose d'y définir proprement les notions d'*ensemble fini* et de *cardinal*, puis de démontrer tout aussi proprement leurs propriétés principales. Ces notions seront étudiées plus tard dans l'année au chapitre « Dénombrement », mais les démonstrations seront laissées de côté à ce moment-là conformément au programme de MPSI. Ce devoir est l'occasion d'en comprendre un peu plus. Attention cependant de ne pas passer en contrebande de simples intuitions sur les ensembles finis et les cardinaux que ce problème se propose justement de justifier !

Pour tout ensemble E, on dit que E est *fini* s'il est vide ou si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, E est équipotent à $[\![1, n]\!]$.

Tout entier n qui satisfait cette assertion est appelé un *cardinal de E*, et si E est vide, l'entier 0 est appelé LE *cardinal de E*. Il n'est pas clair au départ que le cardinal d'un ensemble fini non vide est unique.

1) Mini-lemmes : Soient E et F deux ensembles, $a \in E$ et $b \in F$.

- **a)** On suppose qu'il existe une bijection f de E sur F. Montrer que $f_{|E\setminus\{a\}}$ bijective de $E \setminus \{a\}$ sur $F \setminus \{f(a)\}$.
- **b)** Montrer que si F est équipotent à E, il existe une bijection f de E sur F pour laquelle $f(a) = b$.

2) Unicité du cardinal :

- **a)** Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, si $[\![1, m]\!]$ et $[\![1, n]\!]$ sont équipotents, alors $m = n$.
- **b)** En déduire que tout ensemble fini non vide E possède un et un seul cardinal, noté $|E|$.
- **c)** Montrer proprement que l'ensemble $[\![m, n]\!]$ est fini de cardinal $n - m + 1$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $m \leqslant n$.

3) Ensembles finis et équipotence : Soient E et F deux ensembles. Montrer que si E est fini et si F est équipotent à E, alors F est fini et $|E| = |F|$.

4) Parties d'un ensemble fini :

- **a)** Soient E un ensemble fini non vide et $a \in E$. Montrer que $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $|E| - 1$.
- **b)** Soient E un ensemble fini et A une partie *stricte* de E, i.e. une partie de E distincte de E. Montrer que A est un ensemble fini et que $|A| < |E|$.

  En résumé, on vient de montrer que pour tout ensemble fini E et toute partie A de E, A est un ensemble fini et $|A| \leqslant |E|$ avec égalité si et seulement si $A = E$.

5) Ensembles finis et injectivité/surjectivité : Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

- **a)** On suppose f injective et F fini. Montrer que E est fini et que $|E| \leqslant |F|$.
- **b)** On suppose f surjective et E fini. Montrer que F est fini et que $|F| \leqslant |E|$.
- **c)** On suppose E et F finis de mêmes cardinaux. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

6) Réunion de deux ensembles finis : Soient A et B deux ensembles finis.

- **a)** On suppose A et B disjoints. Montrer que $A \cup B$ est fini et que $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- **b)** Montrer que $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
- **c)** Montrer en toute généralité que $A \cup B$ est fini et que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.